

ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАРДЫ ИНТЕГРАЛДАУ

I. R -рационал функция болсын, онда $\int R(\sin x, \cos x) dx$ түріндегі интеграл $t = \tan \frac{x}{2}, x \in (-\pi, \pi)$ универсал алмастыруы арқылы t -ға қарай рационал функцияға түрлендіріледі:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad x = 2\arctan t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

МЫСАЛ. $\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$ интегралды есептейік. Жоғарыдағы алмастыруды қолданамыз.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x} &= \left| \begin{array}{l} \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3 + \frac{10t}{1+t^2} + \frac{3(1-t^2)}{1+t^2}} = \\ &= 2 \int \frac{dt}{10t+6} = \int \frac{dt}{5t+3} = \frac{1}{5} \ln|5t+3| + C = \frac{1}{5} \ln|5\tan \frac{x}{2} + 3| + C. \end{aligned}$$

II. Интеграл астындағы функция R төмендегі шарттарды қанағаттандырса:

- 1) $R(\sin x, \cos x)$ функциясы $\sin x$ бойынша **тақ** функциясы.
- 2) $R(\sin x, \cos x)$ функциясы $\cos x$ бойынша **тақ** функциясы.
- 3) $R(\sin x, \cos x)$ функциясы $\cos x$ және $\sin x$ бойынша **жұп** функциясы болса, онда әр жағдайға сай алмастыруын жасау керек.

МЫСАЛ. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x + \sin x} dx$ интегралды есептейік. $t = \sin x$ алмастыруын қолданамыз:

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x + \sin x} dx &= \int \frac{\cos^2 x \cos x dx}{\sin^2 x + \sin x} = \left| \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \right| = \\ &= \int \frac{(1 - \sin^2 x) \cos x dx}{\sin^2 x + \sin x} = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{(1 - t^2) dt}{t^2 + t} = \\ &= \int \frac{(1-t)(1+t) dt}{t(t+1)} = \int \frac{(1-t) dt}{t} = \\ &= \int \left(\frac{1}{t} - 1 \right) dt = \ln|t| - t + C = \ln|\sin x| - \sin x + C. \end{aligned}$$

Қайсыбір жағдайларда белгілі $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ формуланы және жасанды түрлендіруді қолданып интегралдау тиімді.

МЫСАЛ. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$ интегралды есептейік.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^4 x} &= \int \frac{1}{\sin^4 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx = \\ &= \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \operatorname{ctg}^2 x d(\operatorname{ctg} x) = -\operatorname{ctg} x - \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} + C. \end{aligned}$$

III. $\int \sin^m x \cdot \sin^n x dx, m, n \in \mathbb{Z}$.

1 жағдай. m, n – көрсеткіштерінің біреуі тақ оң сан болса,

2 жағдай. m, n – көрсеткіштері жұп оң сандар болса,

онда интеграл астындағы функцияның дәрежесін төмендетіп, интегралдау керек:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

МЫСАЛ. $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$ интегралды интеграл астындағы функцияның дәрежесін төмендетіп есептейік:

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \cos^2 x dx &= \int \frac{(1 - \cos 2x)^2}{4} \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \\ &= \frac{1}{8} \int (1 - \cos^2 2x)(1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{8} \int \sin^2 2x (1 - \cos 2x) dx = \\ &= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x dx = \\ &= \frac{1}{16} \int (1 - \cos 4x) dx - \frac{1}{16} \int \sin^2 2x d(\sin 2x) = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin^3 2x}{48} + C. \end{aligned}$$

IV. $\int \sin \alpha x \cos \beta x dx, \int \cos \alpha x \cos \beta x dx, \int \sin \alpha x \sin \beta x dx$. Интеграл астындағы функцияны төмендегі формулалармен түрлендіру керек:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)];$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)];$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)].$$

МЫСАЛ. $\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx$ интегралды есептейік. Алдымен

$$\sin x \cdot \sin 3x = \frac{1}{2} [\cos(x - 3x) - \cos(x + 3x)] = \frac{1}{2} [\cos 2x - \cos 4x]$$

алмастыруды жасап, осыдан:

$$\begin{aligned} \int \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x dx &= \frac{1}{2} \int \sin 2x \cdot [\cos 2x - \cos 4x] dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \sin 2x \cdot \cos 2x dx - \frac{1}{2} \int \sin 2x \cdot \cos 4x dx = \\ &= \frac{1}{4} \int \sin 4x dx - \frac{1}{4} \int (\sin 6x - \sin 2x) dx = \\ &= -\frac{1}{16} \cos 4x + \frac{1}{24} \cos 6x - \frac{1}{8} \cos 2x + C. \end{aligned}$$

V. Гиперболалық функцияларды интегралдау $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) dx$ интегралы $t = th \frac{x}{2}$ алмастыруымен рационалданады.

Шынында,

$$\operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1-t^2}$$

ескерсек, аламыз:

$$\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) dx = 2 \int R\left(\frac{2t}{1-t^2}, \frac{1+t^2}{1-t^2}\right) \frac{dt}{1-t^2}.$$

МЫСАЛ. $\int \frac{dx}{2\operatorname{sh} x + 3\operatorname{ch} x}$ интегралды есептейік.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2\operatorname{sh} x + 3\operatorname{ch} x} &= \int \frac{\frac{2dt}{1-t^2}}{2 \cdot \frac{2t}{1-t^2} + 3 \cdot \frac{1+t^2}{1-t^2}} = 2 \int \frac{dt}{3t^2 + 4t + 3} = \\ &= \frac{2}{3} \int \frac{dt}{\left(t + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{5}{9}} = \frac{6}{3\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{t + \frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} + C = \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3th \frac{x}{2} + 2}{\sqrt{5}} + C. \end{aligned}$$

7-ТАПСЫРМА. Анықталмаған интегралды есептеңіз.

$$7.1. \int \frac{\sin^2 x - 3 \cdot \sin x - \frac{5}{\sin x}}{\sin x} dx$$

$$7.8. \int \frac{5 \cdot \sin 2x - 5 \cdot \operatorname{tg} x}{\sin x \cdot \cos x} dx$$

$$7.2. \int \frac{\cos 2x - 5 \cdot \cos^3 x}{\cos^2 x} dx$$

$$7.9. \int \frac{1 - 3 \sin^3 x}{\sin^2 x} dx$$

$$7.3. \int \frac{\sin 2x}{\cos^3 x} dx$$

$$7.10. \int \frac{\sin 2x}{\sin^3 x} dx$$

$$7.4. \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} dx$$

$$7.11. \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} dx$$

$$7.5. \int \frac{\cos 2x - \cos^2 x}{\sin^4 x} dx$$

$$7.12. \int \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin x \cdot \cos x} dx$$

$$7.6. \int \frac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx$$

$$7.13. \int \frac{\cos 2x + \sin^2 x}{\cos^4 x} dx$$

$$7.7. \int \operatorname{ctg}^2 x dx$$

$$7.14. \int \frac{5 \sin 2x}{\cos^3 x} dx$$

8-ТАПСЫРМА. Анықталмаған интегралды есептеңіз.

8.1. $\int \frac{dx}{3 + 5 \cos x}$

8.7. $\int \frac{dx}{5 + 4 \sin x}$

8.2. $\int \frac{dx}{3 \sin x - \cos x}$

8.8. $\int \frac{dx}{10 \sin x + 5 \cos x}$

8.3. $\int \frac{dx}{3 + 2 \sin x - \cos x}$

8.9. $\int \frac{dx}{3 \sin x - 4 \cos x}$

8.4. $\int \frac{dx}{8 + 4 \cos x}$

8.10. $\int \frac{dx}{8 - 4 \sin x + 7 \cos x}$

8.5. $\int \frac{dx}{7 \sin x - 3 \cos x}$

8.11. $\int \frac{6 \sin x + \cos x}{1 + \cos x} dx$

8.6. $\int \frac{dx}{2 + 4 \sin x + 3 \cos x}$

8.12. $\int \frac{dx}{5 + \sin x + 3 \cos x}$