

РАЦИОНАЛ ФУНКЦИЯЛАРДЫ ИНТЕГРАЛДАУ

Жай рационал бөлшектер

I. $\frac{A}{(x-a)^n}$.

Мысалы, $n = 1$ болсын

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C.$$

МЫСАЛ. Анықталмаған

интегралдарлы табыңыз:

$$1) \int \frac{dx}{2x+7} = \frac{1}{2} \ln|2x+7| + C.$$

$$2) \int \frac{dx}{1-4x} = -\frac{1}{4} \ln|1-4x| + C.$$

II. $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^2}$; $n = 1, 2, \dots$ мұндағы A, M, N, a, p, q - нақты сандар, $p^2 - 4q < 0$.

МЫСАЛ. $\int \frac{dx}{x^2+4x+10}$ интегралын есептейік.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2+4x+10} &= \left| \begin{array}{l} x^2+4x+10 \\ 2b=4 \Rightarrow \\ b=2 \Rightarrow b^2=4 \\ (x^2+4x+4)-4+10= \\ = (x+2)^2+6 \end{array} \right| = \int \frac{dx}{(x+2)^2+6} = \\ &= \int \frac{dx}{(x+2)^2+(\sqrt{6})^2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{6}} + C. \end{aligned}$$

4-ТАПСЫРМА. Анықталмаған интегралды есептеңіз.

4.1 $\int \frac{dx}{x^2 + 8x + 5}$

4.2 $\int \frac{dx}{x^2 - x + 1}$

4.3 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 10}}$

4.4 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 11}}$

4.5 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3x + 1}}$

4.6 $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + 2x - x^2}}$

4.7 $\int \frac{dx}{x + (x+1)^2}$

4.8 $\int \frac{3x+1}{(x-2)^2 + (x+1)} dx$

4.9 $\int \frac{(x-1)dx}{x^2 - 2x + 5}$

Бұрыс рационал-бөлшек функцияның бүтін бөлігін бөліп алу

III. Егер $\frac{P(x)}{Q(x)}$ бөлшегінің $P(x)$ көпмүшелігінің дәрежесі $Q(x)$

көпмүшелігінің дәрежесінен үлкен болса, онда $P(x)$ көпмүшелігін $Q(x)$ көпмүшелігіне бөліп $S(x)$ бүтін бөлігін бөліп алу керек:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

мұндағы $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ дұрыс рационал функция, оны жай бөлшектерге жіктеуге болады.

Онда:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int S(x) dx + \int \frac{P_1(x)}{Q(x)} dx.$$

МЫСАЛ. $\int \frac{x^2+2}{x^2+1} dx$ интегралды есептеңіз.

Шешуі. Интегралданатын рационал-бөлшек функция тең дәрежелі бұрыс бөлшек:

$$\int \frac{x^2+2}{x^2+1} dx = \int \frac{x^2+1+1}{x^2+1} dx = \int 1 dx + \int \frac{1}{x^2+1} dx = x + \arctg x + C.$$

МЫСАЛ. $\int \frac{x^3}{x^2+9} dx$ интегралды есептеңіз.

Шешуі. Интеграл астында бұрыс бөлшек берілген, сондықтан x^3 көпмүшелігін $x^3 + 9x$ көпмүшелігіне бөліп, бүтін бөлігін бөліп аламыз:

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2 + 9 \\ x^3 + 9x & x \\ \hline -9x & \end{array}$$

Онда аламыз:

$$\frac{x^3}{x^2+9} = x + \frac{-9x}{x^2+9}.$$

Осыдан

$$\int \frac{x^3}{x^2+9} dx = \int x dx - 9 \int \frac{x}{x^2+9} dx = \frac{x^2}{2} - \frac{9}{2} \ln|x^2+1| + C.$$

5-ТАПСЫРМА. Анықталмаған интегралды есептеңіз.

5.1 $\int \frac{3x^2 + 1}{x^2 + 25} dx$

5.2 $\int \frac{x^2 - 3 + 2x + 6}{x^2 - 9} dx$

5.3 $\int \frac{x^3}{x^2 + 9} dx$

5.4 $\int \frac{x^3}{x^2 + 9} dx$

5.5 $\int \frac{x^2 + 1}{x^2 + 5} dx$

5.6 $\int \frac{2x^2 - 2}{x^2 - 16} dx$

5.7 $\int \frac{x^2 + 1}{x^2 - 25} dx$

5.8 $\int \frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} dx$

5.9 $\int \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 + 2x - 1} dx$

5.10 $\int \frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} dx$

5.11 $\int \frac{3x^2 + 1}{x^2 + 6x + 25} dx$

5.12 $\int \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 8x + 20} dx$

5.13 $\int \frac{x^2 + 2}{x^2 - 6x + 10} dx$

5.14 $\int \frac{x^2 + 7}{x^2 + 4} dx$

5.15 $\int \frac{x^4}{x^2 + 9} dx$

Дұрыс рационал бөлшектерді интегралдау

Дұрыс рационал бөлшектерді интегралдаудың үш жағдайларын қарастырайық: бөлімінің түбірлері нақты және әртүрлі, бөлімінің түбірлері нақты кейбіреуі еселі, бөлімінің кейбір түбірлері комплекс сандар.

Интегралдарды есептеу барысында **анықталмаған коэффициенттер әдісін** қолданамыз.

1) Бөлімінің түбірлері нақты және әртүрлі

МЫСАЛ. $\int \frac{9-5x}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx$ интегралды есептеңіз.

Шешуі. Анықталмаған коэффициенттер әдісін қолданамыз, ол үшін берілген интегралданатын функцияны жай бөлшектерге жіктейміз:

$$\frac{9-5x}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Бөлімінің түбірлері $x = 1; x = 2; x = 3$ тең. Енді ортақ бөлімге келтіріп, алымдарын теңістіріп, қарастырамыз:

$$9-5x = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2).$$

$x = 1$ тең болғанда

$$9-5 \cdot 1 = A(1-2)(1-3) + B(1-1)(1-3) + C(1-1)(1-2), \\ 4 = 2A, \text{ яғни } A = 2.$$

$x = 2$ тең болғанда

$$9-5 \cdot 2 = A(2-2)(2-3) + B(2-1)(2-3) + C(2-1)(2-2), \\ -1 = -B, \text{ яғни } B = 1.$$

$x = 3$ тең болғанда

$$9-5 \cdot 3 = A(3-2)(3-3) + B(3-1)(3-3) + C(3-1)(3-2), \\ -6 = 2C, \text{ яғни } C = -3.$$

Сонымен

$$\frac{9-5x}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{3}{x-3}.$$

Берілген интеграл:

$$\int \frac{9-5x}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx = \int \frac{2dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{3dx}{x-3} = \\ = 2\ln|x-1| + \ln|x-2| - 3\ln|x-3| + C = \ln \left| \frac{(x-1)^2(x-2)}{(x-3)^3} \right| + C.$$

2) Бөлімінің түбірлері нақты кейбіреуі еселі

МЫСАЛ. $\int \frac{x^2 dx}{(x+2)(x-1)^2}$ интегралды есептеңіз.

Шешуі. Интегралданатын функция дұрыс рационал бөлшек, себебі алымының үлкен дәрежесі 2-ге тең, ал бөлімінің үлкен дәрежесі 3-ке тең. Бөлімінің бір жай $x = -2$ және екі еселі $x = 1$ түбірлері бар. Анықталмаған коэффициенттер әдісін қолданамыз, ол үшін интегралданатын функцияны жай бөлшектерге жіктейміз:

$$\frac{x^2}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}.$$

Енді ортақ бөлімге келтіріп, алымдарын салыстырамыз:

$$x^2 = A(x^2 - 2x + 1) + B(x-1)(x+2) + C(x+2),$$

$$x^2 = Ax^2 - 2Ax + A + Bx^2 + Bx + 2B + Cx + 2C.$$

$$x^2: A + B = 1;$$

$$x^1: -2A + B + C = 0;$$

$$x^0: A + 2B + 2C = 0.$$

Алынған жүйені шешіп, анықталмаған коэффициенттерді табамыз:

$$A = \frac{4}{9}, \quad B = \frac{5}{9}, \quad C = \frac{1}{3}.$$

Берілген интегралды шешеміз:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{(x+2)(x-1)^2} &= \frac{4}{9} \int \frac{dx}{x+2} + \frac{5}{9} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(x-1)^2} = \\ &= \frac{4}{9} \ln|x+2| + \frac{5}{9} \ln|x-1| - \frac{1}{3(x-1)} + C. \end{aligned}$$

3) Бөлімінің кейбір түбірлері комплекс сандар

МЫСАЛ. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$ интегралды есептеңіз.

Шешуі. Бөлімінің $x = 0$ - жай және комплекс

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm i$$

түбірлері бар. Анықталмаған коэффициенттер әдісін қолданамыз, ол үшін интегралданатын функцияны жай бөлшектерге жіктейміз:

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Енді ортақ бөлімге келтіріп, алымдарын салыстырамыз:

$$1 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)x \Rightarrow 1 = Ax^2 + A + Bx^2 + Cx$$

$$x^2: A + B = 0;$$

$$x^1: C = 0;$$

$$x^0: A = 1.$$

Алынған жүйені шешіп анықталмаған коэффициенттерді табамыз:

$$A = 1, \quad B = -1, \quad C = 0.$$

Берілген интегралды шешеміз:

$$\int \frac{dx}{x(x^2 + 1)} = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{x dx}{1 + x^2} = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|1 + x^2| + C = \ln \left| \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \right| + C.$$

6-ТАПСЫРМА. Анықталмаған интегралды есептеңіз.

6.1. $\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)}$

6.2. $\int \frac{x-7}{(x+5)(x-4)^3} dx$

6.3. $\int \frac{x^2+7}{(x^2+4)(x-1)} dx$

6.4. $\int \frac{3x+1}{(x-2)^2 \cdot (x+1)} dx$

6.5. $\int \frac{dx}{x \cdot (x^2+3)}$

6.6. $\int \frac{x^2+1}{x \cdot (x^2+3)} dx$

6.7. $\int \frac{dx}{x^3-8}$

6.8. $\int \frac{x^3}{x^4-1} dx$

6.9. $\int \frac{3x-7}{(x+5)^2(x-4)} dx$

6.10. $\int \frac{dx}{x^2(x+2)}$

6.11. $\int \frac{dx}{x^3+1}$

6.12. $\int \frac{x^2}{(x^3+1)(x+1)} dx$