

АНЫҚТАЛМАҒАН ИНТЕГРАЛДЫ ИНТЕГРАЛДАУ ӘДІСТЕРІ

Тікелей интегралдау әдісі - алгебралық түрлендіру арқылы кестелік интегралына келтіріп интегралды есептеу.

МЫСАЛ. Интегралдарды есептеу:

$$\begin{aligned} 1) \int \frac{3x^3 - 5x^2 + 7}{x^2} dx &= \int \left(\frac{3x^3}{x^2} - \frac{5x}{x^2} + \frac{7}{x^2} \right) dx = \\ &= 3 \int x dx - 5 \int \frac{dx}{x} + 7 \int x^{-2} dx = \frac{3x^2}{2} - 5 \ln x - \frac{7}{x} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \int 2^x(4 - 2^{x+1}) dx &= \int 4 \cdot 2^x dx - \int 2^x \cdot 2^{x+1} dx = \\ &= 4 \int 2^x dx - 2 \int 4^x dx = \frac{4 \cdot 2^x}{\ln 2} - \frac{2 \cdot 4^x}{\ln 4} + C. \end{aligned}$$

$$3) \int \frac{dx}{1 + 5x^2} = \int \frac{dx}{1 + (\sqrt{5}x)^2} = \operatorname{arctg} \sqrt{5}x + C.$$

$$4) \int \frac{dx}{\sqrt{4 - 9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2^2 - (3x)^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{3x}{2} + C.$$

$$5) \int \frac{dx}{x^2 - 49} = \int \frac{dx}{x^2 - 7^2} = \frac{1}{2 \cdot 7} \ln \left| \frac{x - 7}{x + 7} \right| + C = \frac{1}{14} \ln \left| \frac{x - 7}{x + 7} \right| + C.$$

1-ТАПСЫРМА. Анықталмаған интегралды есептеңіз.

- | | | |
|---|--|--------------------------------------|
| 1.1.a) $\int \frac{1 - 5x^3 + 9\sqrt[4]{x^5}}{x^4} dx$ | ә) $\int 2^x(3^x - 8^x) dx$ | б) $\int \frac{7dx}{\sqrt{x^2 + 9}}$ |
| 1.2.a) $\int \frac{\sqrt{x^3} - 2x^2 + 3x^4}{x} dx$ | ә) $\int 3^{-x}(7 + 2^{x+1}) dx$ | б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 16}}$ |
| 1.3.a) $\int \frac{\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + x^5}{x^2} dx$ | ә) $\int 3^x(5 - 7^{-x}) dx$ | б) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 9x^2}}$ |
| 1.4.a) $\int \frac{(\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x})^2}{x} dx$ | ә) $\int 7^{-x}(\sqrt{7^{4x}} + 5^x) dx$ | б) $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$ |
| 1.5.a) $\int (\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{x+2}{x}) dx$ | ә) $\int e^x(5^x - \pi^x) dx$ | б) $\int \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}}$ |
| 1.6.a) $\int (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^2 dx$ | ә) $\int e^x \cdot \sqrt{2^{3x}} dx$ | б) $\int \frac{5dx}{\sqrt{x^2 - 9}}$ |
| 1.7.a) $\int (\frac{x^2}{\sqrt{x}} + \frac{7}{x^4} - x) dx$ | ә) $\int (e^x - 2e^{-3x})^2 dx$ | б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 5}}$ |
| 1.8.a) $\int \frac{(2 - x^{\frac{1}{3}})^3}{x} dx$ | ә) $\int 5^{-x}(4 - 3^{x+2}) dx$ | б) $\int \frac{dx}{25x^2 - 36}$ |
| 1.9.a) $\int (9x - \frac{4\sqrt{x}}{x^2}) dx$ | ә) $\int \pi^x \cdot e^{3x+4} dx$ | б) $\int (\frac{7}{81 - x^2}) dx$ |
| 1.10.a) $\int (x\sqrt[3]{5x} - 3)^3 dx$ | ә) $\int e^{-x}(2^x - 3e^{x+3}) dx$ | б) $\int (\frac{5}{9 + x^2}) dx$ |
| 1.11.a) $\int (x^3 - \frac{2}{\sqrt[3]{x^5}})^{\sqrt[3]{x}} dx$ | ә) $\int (e^x + e^{2x})^2 dx$ | б) $\int \frac{dx}{4x^2 + 25}$ |
| 1.12.a) $\int (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^3 dx$ | ә) $\int 5^x \cdot 3^{2-4x} dx$ | б) $\int \frac{dx}{49x^2 + 16}$ |

Айнымалыны алмастыру әдісі. Дифференциал астына еңгізу арқылы интегралдарды есептеу. Айталық, $x = \varphi(t)$ функциясы қайсыбір T аралығында анықталған, дифференциалданатын функция болсын, сонымен қатар осы функцияның X мәндер жиынында $f(x)$ функциясы анықталған болсын. Егер $f(x)$ функциясының X жиынында алғашқы функциясы $F(x)$ бар болса

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

онда $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ функциясының T жиынында алғашқы функциясы $F(\varphi(t))$ бар және айнымалыны алмастыру формуласы:

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Бұл формула бойынша интегралды есептеген соң t -дан қайта x -ке көшу керек.

МЫСАЛ. Айнымалыны алмастыру әдісін қолданып, интегралдарды есептейміз.

$$\begin{aligned} 1) \int \frac{x dx}{x^2 + 3} &= \left| \begin{array}{l} t = x^2 + 3 \\ dt = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{dt}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln|t| + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2 + 3| + C = \ln\sqrt{x^2 + 3} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \int (3x - 2)^{11} dx &= \left| \begin{array}{l} t = 3x - 2 \\ dt = 3 dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{3} \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{t^{11} dt}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{12}}{12} + C = \frac{1}{36} (3x - 2)^{12} + C. \end{aligned}$$

$$3) \int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x dx}{\sin x} = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\sin x| + C.$$

$$\begin{aligned} 4) \int \frac{dx}{(x+2) \cdot \ln^3(x+2)} &= \left| \begin{array}{l} t = \ln(x+2) \\ dt = \frac{1}{x+2} dx \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{-2t^2} + C = -\frac{1}{2 \ln^2(x+2)} + C. \end{aligned}$$

$$5) \int \frac{\ln x dx}{x \cdot \sqrt{1 + \ln x}} = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{1 + \ln x} \\ \ln x = t^2 - 1 \\ \frac{dx}{x} = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{(t^2 - 1) \cdot 2t dt}{t} = 2 \int (t^2 - 1) dt =$$

$$= 2 \int t^2 dt - 2 \int dt = \frac{2}{3} t^3 - 2t + C = \frac{2}{3} \sqrt{(1 + \ln x)^3} - 2\sqrt{1 + \ln x} + C.$$

МЫСАЛ. Дифференциал астына енгізу арқылы интегралдарды есептеңіз.

$$1) \int \frac{x dx}{x^2 + 3} = \left| x dx = \frac{1}{2} d(x^2 + 3) \right| = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 3)}{x^2 + 3} = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 3| + C.$$

$$2) \int (3x - 2)^{11} dx = \left| (3x - 2) dx = \frac{1}{3} d(3x - 2) \right| = \\ = \frac{1}{3} \int (3x - 2)^{11} d(3x - 2) = \frac{1}{36} (3x - 2)^{12} + C.$$

$$3) \int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x dx}{\sin x} = \left| \cos x dx = d(\sin x) \right| = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln |\sin x| + C.$$

$$4) \int \frac{dx}{(x + 2) \cdot \ln^3(x + 2)} = \left| \frac{dx}{(x + 2)} = d(\ln(x + 2)) \right| = \\ = \int \frac{d(\ln(x + 2))}{\ln^3(x + 2)} = -\frac{1}{2 \ln^2(x + 2)} + C.$$

$$5) \int \frac{dx}{\sqrt{4 - 3x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2^2 - (\sqrt{3} \cdot x)^2}} = \left| dx = \frac{1}{\sqrt{3}} d(\sqrt{3} \cdot x) \right| = \\ = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d(\sqrt{3} \cdot x)}{\sqrt{2^2 - (\sqrt{3} \cdot x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} x + C.$$

$$6) \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[9]{\sin x - \cos x}} dx = \left| (\sin x + \cos x) dx = d(\sin x - \cos x) \right| = \\ = \int \frac{d(\sin x - \cos x)}{\sqrt[9]{\sin x - \cos x}} = \int (\sin x - \cos x)^{-1/9} d(\sin x - \cos x) = \\ = \frac{9}{8} \sqrt[9]{(\sin x - \cos x)^8} + C.$$

2-ТАПСЫРМА. Алмастыру және дифференциал астына енгізу әдістерін пайдаланып анықталмаған интегралды есептеңіз.

2.1 $\int e^{x^2} \cdot x dx$

2.2 $\int e^{x^2+3} \cdot x dx$

2.3 $\int e^{5x^2} \cdot x dx$

2.4 $\int x \cdot \sqrt{x^2+1} dx$

2.5 $\int x \cdot \sqrt[3]{(x^2+3)^4} dx$

2.6 $\int \frac{x dx}{x^2+10}$

2.7 $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$

2.8 $\int \frac{dx}{x \cdot \ln^3 x}$

2.9 $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$

2.10 $\int \cos x \cdot \sqrt{\sin x} dx$

2.11 $\int \frac{\cos x}{2+3\sin x} dx$

2.12 $\int 4^{\cos x} \sin x dx$

Бөліктеп интегралдау әдісі. Егер $u = u(x)$ және $v = v(x)$ функциялары X аралығында дифференциалданса және осы аралықта $\int v du$ интегралы бар болса, онда X аралығында $\int u dv$ интегралы бар болады және

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Бұл формуланы - анықталмаған интегралды бөліктеп интегралдау формуласы деп атайды.

1-ЕРЕЖЕ. Егер интегралданатын функция көпмүшелік пен тригонометриялық (көрсеткіштік) функцияның көбейтіндісі болса, онда u деп көпмүшелікті, ал қалғанын dv деп белгілейміз.

МЫСАЛ. Интегралдарды есептеңіз.

$$\begin{aligned} 1) \int x \sin 3x dx &= \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = x' dx = dx, \\ dv = \sin 3x dx, \quad v = \int \sin 3x dx = -\frac{1}{3} \cos 3x \end{array} \right| = \\ &= x \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cos 3x - \int \left(-\frac{1}{3}\right) \cos 3x dx = -\frac{1}{3} x \cos 3x + \frac{1}{9} \sin 3x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \int (4+x) e^{2x} dx &= \left| \begin{array}{l} u = 4+x, \quad du = dx, \\ dv = e^{2x} dx, \quad v = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{2} (4+x) e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} (4+x) e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C = \frac{1}{2} e^{2x} \left(\frac{7}{2} + x\right) + C. \end{aligned}$$

2-ЕРЕЖЕ. Егер интегралданатын функция көпмүшелік пен кері тригонометриялық (логарифмдік) функцияның көбейтіндісі болса, онда u деп кері тригонометриялық (логарифмдік) функцияны, ал қалғанын dv деп белгілейміз.

МЫСАЛ. Интегралдарды есептеңіз.

$$\begin{aligned} 1) \int \arctg x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \arctg x, \quad dv = dx, \\ du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad v = x \end{array} \right| = \\ &= x \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{x^2+1} = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2) \int (4 + 3x) \ln x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{1}{x} dx, \\ dv = (4 + 3x) dx, \quad v = \int (4 + 3x) dx = 4x + \frac{3x^2}{2} \end{array} \right| = \\
&= \left(4x + \frac{3x^2}{2} \right) \ln x - \int \left(4x + \frac{3x^2}{2} \right) \frac{1}{x} dx = \\
&= \left(4x + \frac{3x^2}{2} \right) \ln x - \int \left(4 + \frac{3}{2}x \right) dx = \left(4x + \frac{3x^2}{2} \right) \ln x - 4x + \frac{3x^2}{4} + C.
\end{aligned}$$

3-ЕРЕЖЕ. *u деп белгіленетін функция дәрежесіне сәйкес бөліктеп интегралдау әдісі сонша рет қолданылады.*

1) $\int (4 + 3x - x^2) \cos x dx$ интегралды есептеңіз.

Шешуі. Интеграл астында көпмүшелік пен тригонометриялық функцияның көбейтіндісі берілген және *u* деп белгіленетін көпмүшелік дәрежесі екіге тең болғандықтан бөліктеп интегралдау әдісін екі рет қолданамыз:

$$\begin{aligned}
\int (4 + 3x - x^2) \cos x dx &= \left| \begin{array}{l} u = 4 + 3x - x^2, \quad du = (3 - 2x) dx, \\ dv = \cos x dx, \quad v = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right| = \\
&= (4 + 3x - x^2) \cdot \sin x - \frac{1}{8} \int (3 - 2x) \sin x dx = \\
&= \left| \begin{array}{l} u = 3 - 2x, \quad du = -2 dx, \\ dv = \sin x dx, \quad v = \int \sin x dx = -\cos x \end{array} \right| = \\
&= \frac{4 + 3x - x^2}{8} \sin x - \frac{1}{8} \left[(3 - 2x) \cdot \left(-\frac{1}{8} \right) \cos x - \left(-\frac{1}{8} \right) \cdot (-2) \int \cos x dx \right] = \\
&= \frac{4 + 3x - x^2}{8} \sin x + \frac{1}{64} \left[(3 - 2x) \cos x + \frac{1}{4} \sin x \right] + C.
\end{aligned}$$

2) $\int \ln^2 x dx$ интегралды есептеңіз.

Шешуі. Интеграл астында логарифмдік функцияны *u* деп белгілейміз, оның дәрежесі екіге тең болғандықтан бөліктеп интегралдау әдісін екі рет қолданамыз:

$$\begin{aligned}
\int \ln^2 x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln^2 x, \quad du = 2 \ln x dx, \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right| = x \ln^2 x - 2 \int x \ln x dx = \\
&= \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{1}{x} dx, \\ dv = x dx, \quad v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = x \ln^2 x - \left(\frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \right) = \\
&\quad x \ln^2 x - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{1}{2} \int x dx = x \ln^2 x - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4} + C.
\end{aligned}$$

3-ТАПСЫРМА. Анықталмаған интегралды есептеңіз.

3.1. $\int x \cdot e^{2x} dx$

3.2. $\int (x + 5) 3^x dx$

3.3. $\int (2x + 5) \cdot e^{\frac{x}{3}} dx$

3.4. $\int x \cdot \cos x dx$

3.5. $\int x \cdot \sin 5x dx$

3.6. $\int x \cdot \cos 3x dx$

3.7. $\int x \cdot \ln x dx$

3.8. $\int \sqrt{x} \cdot \ln x dx$

3.9. $\int x \cdot \ln 5x dx$

3.10. $\int \arcsin x dx$

3.11. $\int x \cdot \arctg x dx$

3.12. $\int \ln x dx$

3.13. $\int (x + 1)^2 \sin x dx$

3.14. $\int x^3 e^x dx$

3.15. $\int (2x + 3)^2 \cos x dx$