

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ТАЛДАУҒА КІРІСПЕ

ШЕКТЕР

АНЫҚТАЛМАҒАНДЫҚТАР ЖӘНЕ ОЛАРДЫ АШУ

$\frac{\infty}{\infty}$ АНЫҚТАЛМАҒАНДЫҚТАР:

I. Қатыстың дәрежелерін салыстыру тәсілі

II. Қатыстың үлкен дәрежелерін қысқарту тәсілі

1-ТАПСЫРМА

$\frac{0}{0}$ АНЫҚТАЛМАҒАНДЫҚТАР:

I. Көбейткіштерге жіктеу тәсілі

2-ТАПСЫРМА

II. Түйіндес өрнекке көбейтіп бөлу тәсілі

3-ТАПСЫРМА

Шексіз аз функциялар

ТАМАША ШЕКТЕР

Бірінші тамаша шек

4-ТАПСЫРМА

Екінші тамаша шек

5-ТАПСЫРМА

Функцияның үзіліссіздігі

6-ТАПСЫРМА

ШЕКТЕР

Айталық, $X=\{x\}$ сандар жиыны болсын. Егер кез келген мейлінше аз оң ε санына сәйкес $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып $|x - x_0| < \delta$ шартын қанағаттандыратын x -тің барлық $x \neq x_0$ мәндері үшін $|f(x) - b| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда b санын $y = f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі **шегі** деп атайды да былай жазады:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b.$$

Теорема (функция шектері туралы). Айталық $f(x)$ және $g(x)$ функцияларының x_0 нүктесінде A және B шектері $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ бар болсын, онда

$$f(x) \pm g(x), f(x) \cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)}, \quad (B \neq 0)$$

функцияларының да x_0 нүктесінде шегі бар және сәйкес $A \pm B$, $A \cdot B$, $\frac{A}{B}$ тең.

$f(x)$ және $g(x)$ функцияларының шектерінің біреуі немесе екеуі де шексіз немесе нөлге тең болған жағдайлар келесі түріндегі өрнектермен беріледі, мұнда C тұрақты сан:

$$\frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty.$$

$f(x)$ және $g(x)$ функциялары үшін

$$f(x) \pm g(x), f(x) \cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)}$$

қатыстарды зерттеуді **анықталмағандықтарды ашу** деп атайды.

Ескерту. C – тұрақты сан:

$$\frac{C}{\infty} = 0; \quad \frac{\infty}{C} = \infty; \quad \frac{0}{C} = 0; \quad \frac{C}{0} = \infty, \quad C \cdot 0 = 0; \quad C \cdot \infty = \infty;$$
$$C^0 = 1; \quad C^\infty = \infty, \text{ егер } C > 1; \quad C^\infty = 0, \text{ егер } C < 1.$$

МЫСАЛ. Шектерді есептеңіз:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x + 1}{x + 7} = \frac{3 \cdot 1 + 1}{1 + 7} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2};$$

$$ә) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 5x + 2}{x^3 + 7} = \frac{4 + 10 + 2}{-8 + 7} = \frac{16}{-1} = -16.$$

АНЫҚТАЛМАҒАНДЫҚТАР ЖӘНЕ ОЛАРДЫ АШУ

Айталық, көпмүшеліктер қатынасының шегін есептеу керек болсын

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n}. \quad (1)$$

$\frac{\infty}{\infty}$ АНЫҚТАЛМАҒАНДЫҚТАР:

I. Қатыстың дәрежелерін салыстыру тәсілі

1-Ереже. Егер (1)-ші

МЫСАЛ. Шекті есептейміз

шекте алымының үлкен
дәрежесі бөлімінің үлкен
дәрежесінен үлкен болса
 $m > n$, онда шек ∞ тең.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + x^3 + 2}{x + 7x^2} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \left| \begin{matrix} m = 4 \\ n = 2 \\ m > n \end{matrix} \right| = \infty.$$

МЫСАЛ. Шекті есептейміз

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x - 3}{\sqrt{x} + 2} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^1 - 3}{x^{\frac{1}{2}} + 2} = \left| \begin{matrix} m = 1 \\ n = \frac{1}{2} \\ m > n \end{matrix} \right| = \infty.$$

2-Ереже. Егер (1)-ші

МЫСАЛ. Шекті есептейміз

шекте алымының үлкен
дәрежесі бөлімінің үлкен
дәрежесіне тең болса
 $m = n$, онда шек олардың
коэффициенттерінің
қатынасына $\frac{a_0}{b_0}$ тең.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + x^2 + 4}{2x^3 - 7x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \left| \begin{matrix} m = 3 \\ n = 3 \\ m = n \end{matrix} \right| = \frac{5}{2}.$$

МЫСАЛ. Шекті есептейміз

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x^5 - 3)}{(8x^3 + 2x)(2x^3 + 1)} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \left| \begin{matrix} m = 6 \\ n = 6 \\ m = n \end{matrix} \right| = \frac{1}{16}.$$

3-Ереже. Егер (1)-ші

МЫСАЛ. Шекті есептеңіз

шекте алымының үлкен
дәрежесі бөлімінің үлкен
дәрежесінен кіші болса
 $m < n$, онда шек нөлге тең.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 2x\sqrt{x}}{9x^2 + 4} &= \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 2x^{3/2}}{9x^2 + 4} = \left| \begin{matrix} m = 3/2 \\ n = 2 \\ m < n \end{matrix} \right| = 0. \end{aligned}$$

МЫСАЛ. Шекті есептеңіз

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^5 - 3x^2 + x}{7x^{12} + 2x^3 + x - 1} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \left| \begin{matrix} m = 5 \\ n = 12 \\ m < n \end{matrix} \right| = 0.$$

II. Қатыстың үлкен дәрежелерін қысқарту тәсілі

(1)-ші шекте

көпмүшеліктер қатыстың
үлкен дәрежелі мүшесін
алымы мен бөлімінде
жақшаның сыртына
шығарып қысқарту, сонан
соң шекті есептеу.

МЫСАЛ. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + x^3 + 2}{x + 7x^2}$ шекті есептеңіз.

Шешуі. Берілген шектің үлкен дәрежесі 4 тең, сондықтан қатыстың алымы мен бөлімінде жақшаның сыртына x^4 шығарып, қысқартамыз да шекті есептейміз:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + x^3 + 2}{x + 7x^2} &= \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 \cdot \left(3 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^4} \right)}{x^4 \cdot \left(\frac{1}{x^3} + \frac{7}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^4}}{\frac{1}{x^3} + \frac{7}{x^2}} = \\ &= \frac{3 + 0 + 0}{0 + 0} = \frac{3}{0} = \infty. \end{aligned}$$

МЫСАЛ. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + x^2 + 4}{2x^3 + 7x}$ шекті есептеңіз.

Шешуі. Берілген шектің үлкен дәрежесі үшке тең, сондықтан қатыстың алымы мен бөлімінде жақшаның сыртына x^3 шығарып, қысқартсақ анықталмағандықтан құтыламыз:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + x^2 + 4}{2x^3 + 7x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \cdot \left(5 + \frac{1}{x} + \frac{4}{x^3} \right)}{x^3 \cdot \left(2 + \frac{7}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{1}{x} + \frac{4}{x^3}}{2 + \frac{7}{x^2}} = \frac{5}{2}.$$

МЫСАЛ. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{5x + 6}$ шекті есептеңіз.

Шешуі. Берілген шектің үлкен дәрежесі екіге тең, сондықтан қатыстың алымы мен бөлімінде жақшаның сыртына x^2 шығарып қысқартып, шекті есептейміз:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{5x + 6} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \cdot \left(2 - \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \cdot \left(\frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x^2}}{\frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}} = \frac{2}{0} = \infty.$$

1-ТАПСЫРМА. $\frac{\infty}{\infty}$ анықталмағандықты ашыңыз: а) қатыстың дәрежелерін

салыстыру тәсілімен, ә) қатыстың үлкен дәрежелерін қысқарту тәсілімен.

$$1.1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 5x^2 + 2}{2x^3 + x - 4}$$

$$1.7 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - 7x^2}{x^2 - 2x + 5}$$

$$1.13 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^{33} - 2x^{12} - 1}{2x^{25} - 3x - 4}$$

$$1.2 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - 18}{8x^2 + 5x - 1}$$

$$1.8 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x + 4x^2}{8x^2 + x + 3}$$

$$1.14 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^8 - 8x^2 + 2}{6x^4 - 5x^3 - 1}$$

$$1.3 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{14} - x + 5}{7x^{13} - x^{14} - 2x}$$

$$1.9 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8 + x^4 - 2x^5}{5x^5 - x^3 - 2}$$

$$1.15 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 7x^3 + 2}{x^4 - 4x^2 + 5}$$

$$1.4 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - x^5 + 18}{8x^5 + 5x^3 - 1}$$

$$1.10 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^4 + x^5 - 6}{3x^5 + 4x^2 - 1}$$

$$1.16 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 + 2x + 8}{4x^3 + x + 9}$$

$$1.5 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 5}{x^4 - 2x + 7}$$

$$1.11 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^{56} - 9x^2 + 1}{7x^{44} - 3x^{52} - 4}$$

$$1.17 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 2}{2x^7 - 5x - 4}$$

$$1.6 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 3x^3}{5x^3 + 11x^2 + 8}$$

$$1.12 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^6 - 7x^4 + 2}{3x^5 - 5x^2 - 4}$$

$$1.18 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^{33} - 6x^{12} + 5}{10x^{35} - x}$$

$\frac{0}{0}$ АНЫҚТАЛМАҒАНДЫҚТАР:

I. Көбейткіштерге жіктеу тәсілі

$x \rightarrow x_0$ ұмтылғанда $\frac{0}{0}$ анықталмағандықты ашу үшін берілген көпмүшеліктерді көбейткіштерге жіктеп, ортақ $x - x_0$ екімүшелікті қысқартамыз.

МЫСАЛ. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x^2 + 13x + 6}{3x^2 + 2x - 8}$ шекті есептеңіз.

Шешуі. Есеп шарты бойынша $x \rightarrow -2$, яғни $x_0 = -2$, онда $5x^2 + 13x + 6$ және $3x^2 + 2x - 8$ көпмүшеліктерді көбейткіштерге жіктеп, $x + 2$ екімүшелікті қысқартамыз:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x^2 + 13x + 6}{3x^2 + 2x - 8} = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)(5x + 3)}{(x + 2)(3x - 4)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x + 3}{3x - 4} = \frac{-7}{-10} = 0,7.$$

2-ТАПСЫРМА. Көбейткіштерге жіктеу тәсілін пайдаланып

анықталмағандықтарды ашыңыз.

2.1 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 6x - 16}{x^2 - 7x + 10}$

2.2 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x^2 - 4x - 5}$

2.3 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 13x + 4}{2x^2 - 3x - 20}$

2.4 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + x - 6}$

2.7 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 + x - 20}$

2.8 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{4x - 12}$

2.5 $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2 - 7x - 8}{x^2 - 5x - 24}$

2.6 $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 6x - 7}{x^2 - 5x - 14}$

2.9 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x + 10}{x^2 + 2x}$

2.10 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 12x^2 + 32x}{x^2 - 5x}$

2.11 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 16}$

2.12 $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x}{3x^2 - 14x - 5}$

II. Түйіндес өрнекке көбейтіп бөлу тәсілі

Егер шекте иррационал (квадрат түбір) өрнектер берілген болса, онда шекті оның түйіндес өрнегіне көбейтіп бөлеміз.

МЫСАЛ. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2+2x-15}$ шекті есептеңіз.

Шешуі. Есеп шарты бойынша $x_0 = 3$, сондықтан $\frac{0}{0}$ анықталмағандықты ашу мақсатында $x - 3$ екімүшелікті алымы мен бөлімінен жекешелеп, қысқартамыз. Шек алымында $\sqrt{5x+1}-4$ иррационал өрнек берілген, иррационалдықтан құтылу үшін, шекті оның $\sqrt{5x+1}+4$ түйіндес өрнегіне көбейтіп, бөлеміз, яғни $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ формуланы қолданамыз және бөліміндегі $x^2 + 2x - 15$ көпмүшелікті $(x-3)(x+5)$ көбейткіштерге жіктейміз, бұдан аламыз:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2+2x-15} &= \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{5x+1}-4)(\sqrt{5x+1}+4)}{(x-3)(x+5)(\sqrt{5x+1}+4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{5x+1-16}{(x-3)(x+5)(\sqrt{5x+1}+4)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{5(x-3)}{(x-3)(x+5)(\sqrt{5x+1}+4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{5}{(x+5)(\sqrt{5x+1}+4)} = \frac{5}{64}. \end{aligned}$$

3-ТАПСЫРМА. Түйіндес өрнекке көбейтіп, бөлу тәсілін пайдаланып анықталмағандықтарды ашыңыз.

$$3.1 \quad \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$$

$$3.2 \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$$

$$3.3 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$$

$$3.4 \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-27}{\sqrt{3x}-x}$$

$$3.5 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{1+x}}$$

$$3.6 \quad \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+20}-4}{x^3+64}$$

$$3.7 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^3+x^2}$$

$$3.8 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{4+x}}{3x^2-4x+1}$$

$$3.9 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$$

$$3.10 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2-\sqrt{x^2+4}}{3x^2}$$

$$3.11 \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$$

$$3.12 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$$

$$3.13 \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$$

$$3.14 \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{6+x}}{x^2-x-6}$$

$$3.15 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$$

ШЕКСІЗ АЗ ФУНКЦИЯЛАР

Егер $\alpha(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі шегі нөлге тең болса, онда $\alpha(x)$ функциясын **шексіз аз функция** немесе қысқаша **шексіз аз** деп атайды:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0.$$

Айталық, $x \rightarrow x_0$ ұмтылғанда $\alpha(x)$ және $\beta(x)$ функциялары шексіз аз функциялар болсын. Онда

1) егер $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ болса, онда $\alpha(x)$ -ты $\beta(x)$ -ке қарағанда жоғары ретті шексіз аз. Белгілеуі: $\alpha(x) = o(\beta)$ (о микрон бета деп оқимыз).

2) егер $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = m$, $m \neq 0$ болса, онда x_0 нүктесінің аймағында $\alpha(x)$ және $\beta(x)$ шексіз аздардың реттері бірдей. Дербес жағдайда $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, онда $\alpha(x)$ және $\beta(x)$ шексіз аздарды x_0 нүктесінің аймағында эквивалентті дейді және $\alpha \sim \beta$ белгілейді.

Шексіз аз функциялардың эквиваленттілігі: егер $x \rightarrow 0$, онда

$$\sin x \sim x, \quad \operatorname{tg} x \sim x, \quad \arcsin x \sim x, \quad \operatorname{arctg} x \sim x, \quad \ln(1+x) \sim x.$$

МЫСАЛ. Шексіз аз функциялардың эквиваленттілігін қолданып, шекті есептеңіз.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\operatorname{tg} 9x} = \left| \frac{0}{0} \right| = \left| \frac{x \rightarrow 0}{\operatorname{tg} 9x \sim 9x} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{9x} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

МЫСАЛ. Шексіз аз функциялардың эквиваленттілігін қолданып, шекті есептеңіз.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{\sin 4x} = \left| \frac{0}{0} \right| = \left| \frac{x \rightarrow 0}{\operatorname{arctg} 3x \sim 3x, \sin 4x \sim 4x} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{4x} = \frac{3}{4}.$$

ТАМАША ШЕКТЕР

Бірінші тамаша шек

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Бірінші тамаша шекті және оның салдарың қолданып шектерді есептеу.

МЫСАЛ.

Салдары.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{3x} = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x \cdot 4}{3 \cdot x \cdot 4} =$$

$$= \frac{4}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} = \left| \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} = 1 \right| = \frac{4}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3}.$$

МЫСАЛ.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \left| \frac{0}{0} \right| = \left| 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \\ &= \frac{2}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \left| \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1 \right| = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

МЫСАЛ.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{5x} = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \operatorname{arctg} 3x}{5 \cdot 3x} = \frac{3}{5}.$$

4-ТАПСЫРМА. Бірінші тамаша шек және шексіз аз функциялардың эквиваленттілігін пайдаланып анықталмағандықтарды ашыңыз.

- | | |
|---|---|
| 4. 1. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x};$ | ә) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 9x}.$ |
| 4. 2. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{5x};$ | ә) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin x}.$ |
| 4. 3. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{5x};$ | ә) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin x}.$ |
| 4. 4. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{1 - \cos 4x};$ | ә) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{\sin 3x}.$ |
| 4. 5. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{x^2};$ | ә) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9x}{\sin 3x}.$ |
| 4. 6. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9x}{\sin x};$ | ә) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x^2}{1 - \cos x}.$ |
| 4. 7. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 8x}{3x};$ | ә) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{1 - \cos x}.$ |
| 4. 8. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{\operatorname{tg} x};$ | ә) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{4 \sin x}.$ |
| 4. 9. а) $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 7x;$ | ә) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{x}.$ |
| 4. 10. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7 \sin 3x}{\operatorname{tg} 9x};$ | ә) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin 5x \operatorname{ctg} 3x.$ |
| 4. 11. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\operatorname{tg} 7x};$ | ә) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 5x}.$ |
| 4. 12. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{9x};$ | ә) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 2x}.$ |
| 4. 13. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7 \operatorname{arctg} x}{\operatorname{tg} 5x};$ | ә) $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 2x.$ |
| 4. 14. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{\sin 5x};$ | ә) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 9x}.$ |
| 4. 15. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} 5x}{\operatorname{tg} 2x};$ | ә) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{4 \sin x}.$ |

Екінші тамаша шек $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = |1^\infty| = e$. Бұл формулада $x = \frac{1}{t}$ десек, онда келесі шекті де екінші тамаша шек деп атайды

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = |1^\infty| = e.$$

Салдары

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} &= \log_a e. & 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} &= 1. \\ 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \ln a; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1. & 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^k - 1}{x} &= k. \end{aligned}$$

МЫСАЛ. Шекті есептеңіз.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{8}{x}\right)^{4x} &= |1^\infty| = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-8}{x}\right)^{\frac{x}{-8}} \right]^{\frac{-8}{x} \cdot 4x} = \left| \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-8}{x}\right)^{\frac{x}{-8}} = e \right| = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-8}{x} \cdot 4x} = \left| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-8}{x} \cdot 4x = \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-32x}{x} = -32 \end{array} \right| = e^{-32}. \end{aligned}$$

МЫСАЛ. Шекті есептеңіз.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{3x+4}\right)^{7x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{7x} = \left| \begin{array}{l} C^\infty = 0, \\ \text{егер } C < 1. \\ C = \frac{1}{3} \end{array} \right| = \left(\frac{1}{3}\right)^\infty = \frac{1^\infty}{3^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

МЫСАЛ. Шекті есептеңіз.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-2}{2x+5}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{2}\right)^{7x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (2)^{7x} = \left| \begin{array}{l} C^\infty = \infty, \\ \text{егер } C > 1. \\ C = 2 \end{array} \right| = 2^\infty = \infty.$$

МЫСАЛ. Шекті есептеңіз.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+5}{3x+4}\right)^{7x} &= |1^\infty| = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3x+5}{3x+4} - 1\right)^{7x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3x+5-3x-4}{3x+4}\right)^{7x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x+4}\right)^{7x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{3x+4}\right)^{3x+4} \right]^{\frac{7x}{3x+4}} = \left| \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x+4}\right)^{3x+4} = e \right| = \end{aligned}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x}{3x+4}} = \left| \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x}{3x+4} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{7}{3} \right| = e^{\frac{7}{3}}.$$

5-ТАПСЫРМА.

Екінші тамаша шекті пайдаланып,

анықталмағандықтарды ашыңыз.

5.1 а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{5x}{2}}$

ә) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-4}{6x+1}\right)^x$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x-4}{6x+1}\right)^x$

5.2 а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{4x}$

ә) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{x+2}\right)^{x-1}$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x+2}\right)^{x-1}$

5.3 а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{6x}$

ә) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-5}{9x}\right)^{x+4}$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{9x-5}{9x}\right)^{x+4}$

5.4 а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{6}{x}\right)^{7x}$

ә) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{7x-2}\right)^{x-5}$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x+3}{7x-2}\right)^{x-5}$

5.5 а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{3x}$

ә) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+7}{8x+1}\right)^x$

б) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$

5.6 а) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 4x)^{\frac{2}{x}}$

ә) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{3x-4}\right)^{2+x}$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+3x}{3x-4}\right)^{2+x}$

5.7 а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^{9x}$

ә) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{x+1}\right)^{3+x}$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{3x+1}\right)^{3+x}$

5.8 а) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 6x)^{\frac{2}{x}}$

ә) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{4x+5}\right)^{2x-1}$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+4x}{4x}\right)^{2x-1}$

5.9 а) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{3}{x}}$

ә) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5+4x}{7+x}\right)^x$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5+x}{7+x}\right)^x$

5.10 а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{x}\right)^x$

ә) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{x+5}\right)^{x+5}$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3-2x}{1-2x}\right)^{x+5}$

ҮЗІЛІССІЗДІК

$f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз деп аталады егер: 1) функция x_0 нүктесінің қайсы бір аймағында анықталған; 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ шегі бар; 3) бұл шек функцияның x_0 нүктесіндегі мәніне тең $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ болса.

Егер кез келген оң ε санына сәйкес $\delta > 0$ саны табылып $x_0 < x < x_0 + \delta$ ($x_0 - \delta < x < x_0$) шартын қанағаттандыратын аргумент x -тің барлық $x \neq x_0$ мәндері үшін $|f(x) - b| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда b санын $y = f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі **оң жақ (сол жақ) шегі** деп атайды да былай жазады:

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = b \quad \left(\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = b \right)$$

немесе

$$f(x_0 + 0) \quad (f(x_0 - 0)).$$

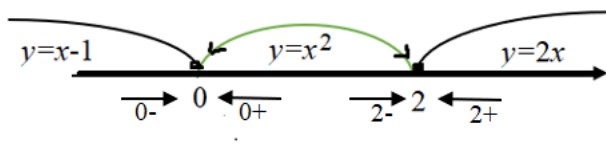
Функцияның оң және сол жақ шектерін функцияның **бір жақты шектері** деп атайды. Егер біржақты шектері бар және олар функцияның x_0 нүктесіндегі мәніне тең емес болса, онда x_0 нүктесін **бірінші текті үзіліс нүктесі** деп атайды. Ал оң және сол жақ шектерінің айырымын үзіліс функцияның x_0 нүктесіндегі **секіруі** деп атайды.

Егер бір жақты шектері x_0 нүктесінде бар және бір біріне тең болса, онда x_0 нүктесін **жойылатын үзіліс нүктесі** деп атайды.

МЫСАЛ. $y(x) = \begin{cases} x - 1, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x < 2 \\ 2x, & x \geq 2 \end{cases}$ функцияны үзіліссіздікке зерттеңіз.

Шешуі. Есеп шарты бойынша $x_0 = 0$, $x_0 = 2$ нүктелерінде үзіліс болуы мүмкін, себебі $y(x) = x - 1$ функциясының $x = 0$ нүктесінде мәні бар; $y(x) = x^2$ функциясы $x = 0$ және $x = 2$ нүктелеріне ұмтылады, бірақ бұл нүктелерде мәндері жоқ; $y(x) = 2x$ функциясының $x = 2$ нүктесінде мәні бар.

Енді функцияның $x_0 = 0$, $x_0 = 2$ нүктелердегі біржақты шектерін анықтаймыз.



$x_0 = 0$ нүктесіндегі біржақты шектерді қарастырамыз:

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} (x - 1) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} x^2 = 0.$$

Сонымен, $x_0 = 0$ - бірінші текті үзіліс нүкте, себебі біржақты шектері бар және олар бір біріне тең емес. Ал секіруі тең болады $0 - (-1) = 1$.

Енді $x_0 = 2$ нүктедегі біржақты шектерді табамыз:

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} x^2 = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} 2x = 4,$$

яғни $x_0 = 2$ нүктесінде бір жақты шектері бар және бір біріне тең, осыдан $x_0 = 2$ нүктесі жойылатын үзіліс нүкте.

Жауабы. $x_0 = 0$ - бірінші текті үзіліс нүкте, секіруі 1 тең, $x_0 = 2$ нүктесі жойылатын үзіліс нүкте.

Анықтама. Егер оң жақ немесе сол жақ шектерінің жоқ дегенде біреуі болмаса, онда $f(x)$ функциясының x_0 нүктесі **екінші текті үзіліс нүкте**.

МЫСАЛ. $f(x) = 9^{\frac{5}{8-x}}$ функцияны үзіліссіздікке зерттеңіз.

Шешуі. $f(x) = 9^{\frac{5}{8-x}}$ функциясы $x \in (-\infty; 8) \cup (8; +\infty)$ аралықтарында анықталған, сондықтан $x_0 = 8$ нүктесінде үзіліс болуы мүмкін. Функцияның осы нүктедегі біржақты шектерін анықтаймыз:

$$\lim_{x \rightarrow 8-0} 9^{\frac{5}{8-x}} = 9^{\frac{5}{8-(8-0)}} = 9^{\frac{5}{8-8+0}} = 9^{\frac{5}{0}} = 9^{+\infty} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 8+0} 9^{\frac{5}{8-x}} = 9^{\frac{5}{8-(8+0)}} = 9^{\frac{5}{8-8-0}} = 9^{\frac{5}{-0}} = 9^{-\infty} = \frac{1}{9^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Демек, $x_0 = 8$ нүкте - екінші текті үзіліс нүкте.

МЫСАЛ. $f(x) = \frac{4}{5+3x}$ функцияны үзіліссіздікке зерттеңіз.

Шешуі. Бұл функция $x \in \left(-\infty; -\frac{5}{3}\right) \cup \left(-\frac{5}{3}; +\infty\right)$ аралықтарында анықталған, сондықтан үзіліс $x_0 = -\frac{5}{3}$ нүктесінде болуы мүмкін. Функцияның осы нүктедегі біржақты шектерін анықтаймыз:

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{5}{3}-0} \frac{4}{5+3x} = \frac{4}{5+3 \cdot \left(-\frac{5}{3}-0\right)} = \frac{4}{5-5-0} = \frac{4}{-0} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{5}{3}+0} \frac{4}{5+3x} = \frac{4}{5+3 \cdot \left(-\frac{5}{3}+0\right)} = \frac{4}{5-5+0} = \frac{4}{+0} = +\infty.$$

Демек, $x_0 = -\frac{5}{3}$ - екінші текті үзіліс нүкте.

6-ТАПСЫРМА. Берілген $f(x)$ және $g(x)$ функцияларының үзіліс нүктелерін және олардың түрлерін анықтаңыз.

$$6.1. a) f(x) = 5^{\frac{1}{x-2}} \quad \text{ә) } g(x) = \frac{3}{x+8} \quad б) f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1, \\ x^2+2, & -1 \leq x \leq 1, \\ 2x, & x > 1. \end{cases}$$

$$6.2. a) f(x) = 7^{\frac{1}{x+5}} \quad \text{ә) } g(x) = \frac{6}{1-x} \quad б) f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \leq 1, \\ 2x, & 1 < x \leq 3, \\ x+2, & x > 3. \end{cases}$$

$$6.3. a) f(x) = 9^{\frac{1}{x-1}} \quad \text{ә) } g(x) = \frac{7}{x-9} \quad б) f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x^2+1, & 0 \leq x < 2, \\ 1+x, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$6.4. a) f(x) = 4^{\frac{1}{2-x}} \quad \text{ә) } g(x) = \frac{3}{7-x} \quad б) f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ x^2-1, & -1 < x \leq 2, \\ 2x, & x > 2. \end{cases}$$

$$6.5. a) f(x) = 7^{\frac{1}{x-2}} \quad \text{ә) } g(x) = \frac{3}{5+x} \quad б) f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 2, \\ x+1, & x > 2. \end{cases}$$

$$6.6. a) f(x) = 3^{\frac{1}{4+x}} \quad \text{ә) } g(x) = \frac{3}{x+4} \quad б) f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \leq 0, \\ x, & 0 < x \leq 1, \\ x+2, & x > 1. \end{cases}$$

$$6.7. a) f(x) = 9^{\frac{1}{1-x}} \quad \text{ә) } g(x) = \frac{1}{2-x} \quad б) f(x) = \begin{cases} x-3, & x < 0, \\ x+1, & 0 \leq x \leq 4, \\ x+3, & x > 4. \end{cases}$$

$$6.8. a) f(x) = 4^{\frac{1}{x-3}} \quad \text{ә) } g(x) = \frac{1}{5+x} \quad б) f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

$$6.9. a) f(x) = 6^{\frac{1}{2+x}} \quad \text{ә) } g(x) = \frac{8}{2-x} \quad б) f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq \pi/2, \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \pi, \\ 2, & x \geq \pi. \end{cases}$$

$$6.10. a) f(x) = 2^{\frac{1}{x+9}} \quad \text{ә) } g(x) = \frac{5}{x+4} \quad б) f(x) = \begin{cases} x+3, & x \leq 0, \\ 1, & 0 < x \leq 2, \\ x^2-2, & x > 2. \end{cases}$$

$$6.11. a) f(x) = 4^{\frac{1}{x-7}} \quad \text{ә) } g(x) = \frac{1}{5+x} \quad б) f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x < 2, \\ 2x, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$6.12. a) f(x) = 9^{\frac{1}{7-x}} \quad \text{ә) } g(x) = \frac{3}{x-6} \quad б) f(x) = \begin{cases} -x+2, & x \leq -2, \\ x^3, & -2 < x \leq 1, \\ 2, & x > 1. \end{cases}$$

$$\mathbf{6.13.} a) f(x) = 4^{\frac{1}{5-x}}$$

$$\text{б)} g(x) = \frac{3}{x+2}$$

$$\text{в)} f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x^3, & 0 < x \leq 2, \\ x+4, & x > 2. \end{cases}$$

$$\mathbf{6.14.} a) f(x) = 3^{\frac{1}{2-x}}$$

$$\text{б)} g(x) = \frac{1}{11-x}$$

$$\text{в)} f(x) = \begin{cases} x^3, & x < -1, \\ x-1, & -1 \leq x \leq 3, \\ -x+5, & x > 3. \end{cases}$$