

КОМПЛЕКС САНДАР

Комплекс сандардың алгебралық түрі

Комплекс сандарға амалдар қолдану

Комплекс санының модулі (ұзындығы)

Комплекс санының аргументі

Комплекс санның тригонометриялық және көрсеткіштік түрлері

Муавр формуласы

ТАПСЫРМА

Комплекс сандардың алгебралық түрі

Комплекс санды **алгебралық түрде** берілген дейді, егер ол мына түрде жазылса

$$z = x + iy,$$

мұндағы x - комплекс санның нақты бөлігі, $x = Re$, y - комплекс санның жорамал бөлігі, $y = Imz$, $i = \sqrt{-1}$ жорамал бірлік, $i^2 = -1$.

МЫСАЛ. $x^2 + x + 1 = 0$ теңдеуді шешіңіз.

Шешуі. Берілген теңдеудің түбірлері комплекс сандар:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \\ &= \left| \sqrt{-1} = i \right| = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i. \end{aligned}$$

МЫСАЛ. $x^2 + 81 = 0$ теңдеуді шешіңіз.

Шешуі. Берілген теңдеудің түбірлері комплекс сандар:

$$x^2 = -81 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-81} = \pm\sqrt{81} \cdot \sqrt{-1} = \left| \sqrt{-1} = i \right| = \pm 9i.$$

Кез келген комплекс санды координаталары x пен y болатын жазықтықтағы нүкте түрінде кескіндеуге болады.

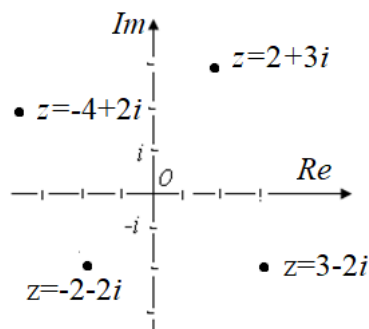
МЫСАЛ. Комплекс сандары жазықтықтағы нүкте түрінде кескіндеңіз:

$$z = 2 + 3i;$$

$$z = -4 + 2i;$$

$$z = -2 - 2i;$$

$$z = 3 - 2i.$$



1 сурет.

Шешуі. Сурет 1.

Комплекс сандарға амалдар қолдану

Айталық, $z_1 = x_1 + iy_1$ және $z_2 = x_2 + iy_2$ екі комплекс сандар берілсін.

I. Комплекс сандарды қосу (азайту)

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2).$$

МЫСАЛ. $z_1 = 1 - 5i$; $z_2 = 4 + 7i$ комплекс сандардың қосындысы мен айырымын табамыз, мұндағы $x_1 = 1, y_1 = -5, x_2 = 4, y_2 = 7$:

$$(1 - 5i) + (4 + 7i) = (1 + 4) + (-5 + 7)i = 5 + 2i;$$

$$(1 - 5i) - (4 + 7i) = (1 - 4) + (-5 - 7)i = -3 - 12i.$$

II. Екі комплекс сандардың көбейтіндісі

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

МЫСАЛ. Екі $z_1 = -1 + 3i$ және $z_2 = 2 - 5i$ комплекс сандардың көбейтіндісін табамыз:

$$\begin{aligned} (-1 + 3i)(2 - 5i) &= (-1) \cdot (2 - 5i) + 3i \cdot (2 - 5i) = \\ &= (-1) \cdot 2 + (-1) \cdot (-5i) + 3i \cdot 2 + 3i \cdot (-5i) = -2 + 5i + 6i - 15 \cdot i^2 = \\ &= \left| i^2 = -1 \right| = -2 + 5i + 6i - 15 \cdot (-1) = 13 + 11i. \end{aligned}$$

МЫСАЛ. Екі $z_1 = -2i$ және $z_2 = 3 + 4i$ комплекс сандардың көбейтіндісін табамыз:

$$\begin{aligned} (-2i) \cdot (3 + 4i) &= (-2i) \cdot 3 + (-2i) \cdot 4i = \\ &= -6i - 8 \cdot i^2 = \left| i^2 = -1 \right| = -6i - 8 \cdot (-1) = 8 - 6i. \end{aligned}$$

III. Егер $z = x + iy$ комплекс сан болса, онда $\bar{z} = x - iy$ саны z санына түйіндес сан. Екі түйіндес комплекс сандардың көбейтіндісі оң сан:

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 \geq 0.$$

МЫСАЛ. z комплекс саны үшін $\bar{z}$ түйіндес саның анықтап, көбейтінділерін табайық:

1) $z = 3 - 2i$ санына түйіндес сан $\bar{z} = 3 + 2i$;

$$z\bar{z} = (3 - 2i)(3 + 2i) = \left| \begin{matrix} x = 3 \\ y = 2 \end{matrix} \right| = 3^2 + 2^2 = 13.$$

2) $z = 1 + 9i$ санына түйіндес сан $\bar{z} = 1 - 9i$;

$$z\bar{z} = (1 + 9i)(1 - 9i) = \left| \begin{matrix} x = 1 \\ y = 9 \end{matrix} \right| = 1^2 + 9^2 = 82.$$

3) $z = -i$ санына түйіндес сан $\bar{z} = i$.

$$z\bar{z} = (-i) \cdot i = \begin{vmatrix} x = 0 \\ y = 1 \end{vmatrix} = 1^2 = 1.$$

Комплекс сандарды бөлу. Екі комплекс сандар қатынасы (немесе қатынастың тек бөлімі комплекс сан) берілсе, бөлу амалы санды алгебралық түріне келтіру деп қарастырса болады, сондықтан қатынасты бөліміне түйіндес өрнекке көбейтіп, бөлеміз.

МЫСАЛ. $\frac{-1+3i}{2+5i}$ комплекс саның $x + yi$ алгебралық түрінде жазыңыз.

Шешуі. Берілген комплекс саның өзінің $2 + 5i$ бөліміне түйіндес $2 - 5i$ өрнекке көбейтіп, бөлеміз:

$$\begin{aligned}\frac{-1+3i}{2+5i} &= \frac{-1+3i}{2+5i} \cdot \frac{2-5i}{2-5i} = \\ &= \frac{(-1) \cdot 2 + 3i \cdot 2 + (-1) \cdot (-5i) + 3i \cdot (-5i)}{2^2 + 5^2} = \\ \frac{-2 + 6i + 5i - 15i^2}{29} &= \left| i^2 = -1 \right| = \frac{13 + 11i}{29} = \frac{13}{29} + \frac{11}{29}i.\end{aligned}$$

МЫСАЛ. $\frac{3}{4-i}$ комплекс саның $x + yi$ алгебралық түрінде жазыңыз.

Шешуі. Берілген комплекс саның өзінің $4 - i$ бөліміне түйіндес $4 + i$ өрнекке көбейтіп, бөлеміз:

$$\frac{3}{4-i} = \frac{3}{4-i} \cdot \frac{4+i}{4+i} = \frac{12+3i}{4^2-i^2} = \left| i^2 = -1 \right| = \frac{12+3i}{17} = \frac{12}{17} + \frac{3}{17}i.$$

МЫСАЛ. $\frac{1-i}{4i}$ комплекс саның $x + yi$ түрінде жазыңыз.

Шешуі. Берілген комплекс саның i өрнегіне көбейтіп, бөлеміз:

$$\frac{1-i}{4i} = \frac{1-i}{4i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i-i^2}{4i^2} = \left| i^2 = -1 \right| = -\frac{1+i}{4} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i.$$

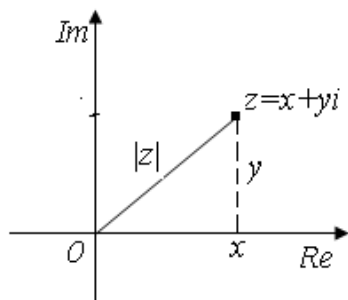
Комплекс санының модулі (ұзындығы)

Комплекс санының **модулі**
(ұзындығы) деп

$$|z| = |x + iy| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

саның атайды да $|z|$

белгілейді (сурет 2).



2 сурет.

МЫСАЛ. Комплекс сандардың
модульдерін табыңыз.

1) $z = i$, мұндағы $x = 0; y = 1$, онда
комплекс санының модулі (ұзындығы):

$$|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1.$$

2) $z = 2 + 5i$, мұндағы $x = 2; y = 5$, онда
оның модулі

$$|z| = |2 + 5i| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}.$$

Комплекс санының аргументі

$\overline{OM}$ векторының O осінің оң бағытымен жасайтын бұрышын комплекс санының **аргументі** деп атайды және оны $Argz$ деп белгілейді

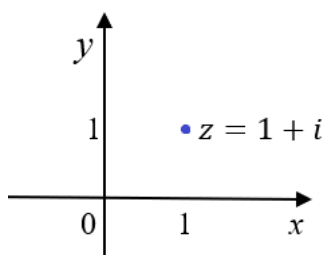
$$Argz = Arg(x + iy) = arg z + 2k\pi,$$

аргументтің бір ғана мәні $0 < \varphi \leq 2\pi$ шартты қанағаттандырса, онда оны аргументтің бас мәні деп атап, $arg z = \varphi$ белгілейді, мұндағы

$$-\pi < arg z \leq \pi, \quad -\frac{\pi}{2} < \arctg \frac{y}{x} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Аргументтің негізгі мәнін келесі формулалардан табады:

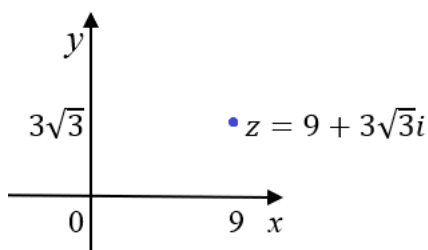
$$arg z = \varphi = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, & \text{егер } z \text{ саны } 1 \text{ немесе } 4 \text{ шіректе жатса,} \\ \pi + \arctg \frac{y}{x}, & \text{егер } z \text{ саны } 2 \text{ шіректе жатса,} \\ -\pi + \arctg \frac{y}{x}, & \text{егер } z \text{ саны } 3 \text{ шіректе жатса.} \end{cases}$$



Сурет 3.

МЫСАЛ. $z = 1 + i$ (сурет 3)

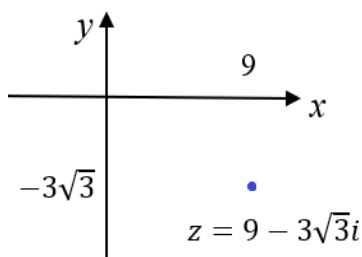
$$arg(1 + i) = \left| \begin{array}{l} x = 1; y = 1 \\ (1, 1) \in 1 \text{ шірекке} \\ \arctg \frac{y}{x} = \arctg 1 \end{array} \right| = \pi/4.$$



Сурет 4.

МЫСАЛ. $z = 9 + 3\sqrt{3}i$ (сурет 4)

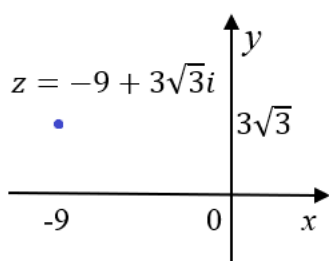
$$arg(9 + 3\sqrt{3}i) = \left| \begin{array}{l} x = 9; y = 3\sqrt{3} \\ (9, 3\sqrt{3}) \in 1 \text{ шірекке} \\ \arctg \frac{y}{x} = \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array} \right| = \frac{\pi}{6}.$$



Сурет 5.

МЫСАЛ. $z = 9 - 3\sqrt{3}i$ (сурет 5)

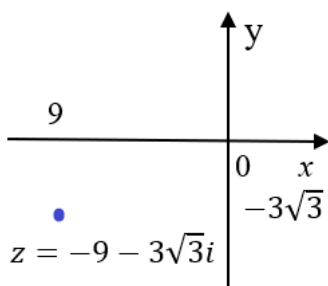
$$arg(9 - 3\sqrt{3}i) = \left| \begin{array}{l} x = 9; y = -3\sqrt{3} \\ (9, -3\sqrt{3}) \in 4 \text{ шірекке} \\ \arctg \frac{y}{x} = -\arctg \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array} \right| = -\frac{\pi}{6}.$$



Сурет 6.

МЫСАЛ. $z = -9 + 3\sqrt{3}i$ (сурет 6)

$$\begin{aligned} \arg(-9 + 3\sqrt{3}i) &= \\ &= \left| \begin{array}{l} x = -9; y = 3\sqrt{3} \\ (-9, 3\sqrt{3}) \in 2\text{шірекке} \\ \pi + \arctg \frac{y}{x} = \pi + \arctg \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \end{array} \right| = \\ &= \pi + \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6}. \end{aligned}$$

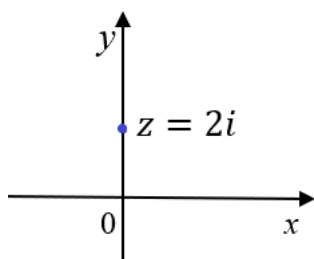


Сурет 7.

МЫСАЛ. $z = -9 - 3\sqrt{3}i$ (сурет 7)

$$\begin{aligned} \arg(-9 - 3\sqrt{3}i) &= \\ &= \left| \begin{array}{l} x = -9; y = -3\sqrt{3} \\ (-9, -3\sqrt{3}) \in 3\text{шірекке} \\ -\pi + \arctg \frac{y}{x} = -\pi + \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array} \right| = \\ &= -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}. \end{aligned}$$

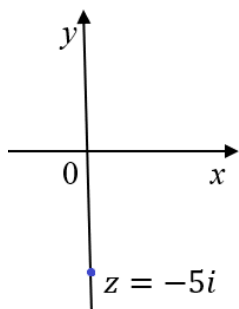
Егер комплекс сан координата осьтерінде жатса, онда модуль мен аргументті оның геометриялық бейнесі бойынша табуға болады.



Сурет 8.

МЫСАЛ. $z = 2i$ (сурет 8)

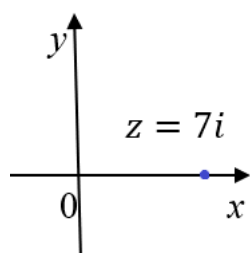
$$\arg 2i = \left| \begin{array}{l} x = 0; y = 2 \\ (0, 2) \in Oy \end{array} \right| = \frac{\pi}{2}.$$



МЫСАЛ. $z = -5i$ (сурет 9)

$$\begin{aligned} \arg(-5i) &= \left| \begin{array}{l} x = 0; y = -5 \\ (0, -5) \in -Oy \end{array} \right| = \\ &= \frac{3\pi}{4} \text{ немесе } -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

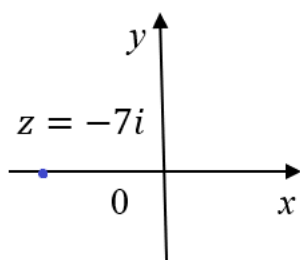
Сурет 9.



Сурет 10.

МЫСАЛ. $z = 7$ (сурет 10)

$$\arg(7 + 0i) = \left| \begin{array}{l} x = 7; y = 0 \\ (7, 0) \in Ox \end{array} \right| = 0.$$



Сурет 11.

МЫСАЛ. $z = -7$ (сурет 11)

$$\arg(-7 + 0i) = \left| \begin{array}{l} x = -7; y = 0 \\ (-7, 0) \in -Ox \end{array} \right| = \pi.$$

Комплекс санның тригонометриялық және көрсеткіштік түрлері

Егер $z = x + iy$,

мұнда $x = \rho \cos \varphi$,

$y = \rho \sin \varphi$

нүктесінің полярлық

координаталарын ρ

және φ деп

белгілесек, онда

комплекс санның

тригонометриялық

түрі:

$$z = x + iy$$

$$= \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

комплекс санның

көрсеткіштік түрі:

$$z = \rho e^{i\varphi}.$$

МЫСАЛ. $z_1 = -1 + i$; $z_2 = -1$ комплекс сандардың тригонометриялық және көрсеткіштік түрлерін жазыңыз.

Шешуі. 1) z_1 саны үшін $x = -1$; $y = 1$. z_1 комплекс санының модулі мен аргументі:

$$|z| = \rho = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

$$\arg z = \pi + \arctg\left(\frac{1}{-1}\right) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4},$$

яғни $\varphi = \frac{3\pi}{4}$. Осыдан z_1 комплекс санының тригонометриялық түрі:

$$-1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right);$$

көрсеткіштік түрі:

$$-1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

2) $z_2 = -1$ саны үшін $x = -1$; $y = 0$. Модулі мен аргументін табамыз

$$|z| = \rho = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1,$$

$$\arg z = \arctg(-1) = \pi.$$

яғни $\varphi = \pi$. Осыдан тригонометриялық және көрсеткіштік түрлері:

$$z_2 = \cos \pi + i \sin \pi;$$

$$z_2 = e^{i\pi}.$$

МУАВР ФОРМУЛАСЫ

$$z^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

МЫСАЛ. $(1 + \sqrt{3}i)^9$ комплекс саның есептеніз.

Шешуі. Модулі мен аргументін табамыз

$$\rho = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = 2; \quad \arg z = \arctg \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}.$$

Онда $1 + \sqrt{3}i$ комплекс санының тригонометриялық түрі:

$$z = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}).$$

Бұл санның тоғыз дәрежесін есептеу үшін Муавр формуласын қолданамыз:

$$\begin{aligned} z^9 &= (1 + \sqrt{3}i)^9 = 2^9 (\cos 9 \cdot \frac{\pi}{3} + i \sin 9 \cdot \frac{\pi}{3}) = \\ &= 2^9 (\cos 3\pi + i \sin 3\pi) = \begin{vmatrix} \cos 3\pi = -1 \\ \sin 3\pi = 0 \end{vmatrix} = 2^9 \cdot (-1) = -512. \end{aligned}$$

Егер $z = \rho(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ және $\varphi = \arg z$ болса, онда комплекс санның әртүрлі n түбірлерінің мәндерін анықтайтын формула:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), (k = 0, 1, n-1).$$

МЫСАЛ. $\sqrt[6]{-1}$ табу керек.

Шешуі. $z = -1; y = 0$ комплекс санының модулі мен аргументін табамыз

$$\rho = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1, \quad \varphi = \arg z = \pi.$$

Онда $z = -1$ комплекс санының тригонометриялық түрі:

$$z = 1 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi),$$

$$\sqrt[6]{-1} = 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{6} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{6} \right),$$

мұндағы $n = 6$ болғандықтан $k = 0, 1, \dots, 5$.

$$k = 0: z_0 = \cos \frac{\pi + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{6} + i \sin \frac{\pi + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{6} = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i;$$

$$\begin{aligned} k = 1: z_1 &= \cos \frac{\pi + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{6} + i \sin \frac{\pi + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{6} = \cos \frac{3\pi}{6} + i \sin \frac{3\pi}{6} = \\ &= \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i; \end{aligned}$$

$$k = 2: z_2 = \cos \frac{\pi + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{6} + i \sin \frac{\pi + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{6} = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i;$$

$$k = 3: z_3 = \cos \frac{\pi + 2 \cdot 3 \cdot \pi}{6} + i \sin \frac{\pi + 2 \cdot 3 \cdot \pi}{6} = \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i;$$

$$k = 4: z_4 = \cos \frac{\pi + 2 \cdot 4 \cdot \pi}{6} + i \sin \frac{\pi + 2 \cdot 4 \cdot \pi}{6} = \cos \frac{9\pi}{6} + i \sin \frac{9\pi}{6} = \\ = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i;$$

$$k = 5: z_5 = \cos \frac{\pi + 2 \cdot 5 \cdot \pi}{6} + i \sin \frac{\pi + 2 \cdot 5 \cdot \pi}{6} = \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} = \\ = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

ТАПСЫРМА.

Комплекс сандардың модулін және аргументін табыңыз

1. $z = 9 - 3\sqrt{3}i.$

4. $z = -9 - 3\sqrt{3}i.$

7. $z = \sqrt{3} + 3i$

2. $z = -9 + 3\sqrt{3}i.$

5. $z = \frac{\sqrt{3} + i}{2 - 2i}$

8. $z = 1 - \sqrt{3}i.$

3. $z = -1 + i.$

6. $z = -1 - i.$

9. $z = 3.$

Комплекс саның есептеңіз

10. $\sqrt[6]{-4}$

11. $\sqrt[5]{-7}$

12. $\sqrt[4]{-5}$