

ЖАЗЫҚТЫҚ

Берілген үш нүкте арқылы өтетін жазықтық тендеуі

$M_0(x_0, y_0, z_0), M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ - үш нүкте арқылы өтетін жазықтық тендеуі:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

МЫСАЛ. Үш нүкте $M_0(1, -2, 3), M_1(2, 5, 0), M_2(4, -7, -1)$ берілсін. Жазықтық тендеуін жазыңыз.

Шешуі. Үш нүкте арқылы өтетін P_1 жазықтық тендеуін жазамыз:

$$P_1: \begin{vmatrix} x - 1 & y - (-2) & z - 3 \\ 2 - 1 & 5 - (-2) & 0 - 3 \\ 4 - 1 & -7 - (-2) & -1 - 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - 1 & y + 2 & z - 3 \\ 1 & 7 & -3 \\ 3 & -5 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

Жазықтықтың жалпы теңдеуі

$$P_1: Ax + By + Cz + D = 0,$$

мұндағы $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ және A, B, C, D коэффициенттерді жазықтыққа перпендикуляр қайсы бір $\overline{N} = A\overline{i} + B\overline{j} + C\overline{k}$ векторының координаталары деп қарастыруға болады.

$Ax + By + Cz + D = 0$ жалпы теңдеуімен берілген жазықтықтың дербес жағдайлары:

$A = 0$, онда жазықтық Ox осіне параллель;

$B = 0$, онда жазықтық Oy осіне параллель;

$C = 0$, онда жазықтық Oz осіне параллель;

$D = 0$, онда жазықтық бас нүктеден өтеді;

$A = B = 0$, онда жазықтық Oz осіне перпендикуляр (xOy жазықтығына параллель);

$A = C = 0$, онда жазықтық Oy осіне перпендикуляр (xOz жазықтығына параллель);

$B = C = 0$, онда жазықтық Ox осіне перпендикуляр (yOz жазықтығына параллель);

$A = D = 0$, онда жазықтық Ox осінен өтеді;

$B = D = 0$, онда жазықтық Oy осінен өтеді;

$C = D = 0$, онда жазықтық Oz осінен өтеді;

$A = B = D = 0$, онда жазықтық xOy жазықтығымен беттеседі ($z = 0$);

$A = C = D = 0$, онда жазықтық xOz жазықтығымен беттеседі ($y = 0$);

$B = C = D = 0$, онда жазықтық yOz жазықтығымен беттеседі ($x = 0$).

МЫСАЛ. Үш нүктелер арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі берілген

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ 1 & 7 & -3 \\ 3 & -5 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

Жазықтықтың жалпы теңдеуін жазыңыз.

Шешуі. Анықтауышты бірінші жолы бойынша жіктейміз:

$$\begin{aligned} (x-1) \cdot \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} - (y+2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} + (z-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = \\ = (x-1) \cdot (-43) - (y+2) \cdot 5 + (z-3) \cdot (-26) = \\ = -43x + 43 - 5y - 10 - 26z + 78 = 0. \end{aligned}$$

Осыдан жазықтықтың жалпы теңдеуін аламыз:

$$43x + 5y + 26z - 111 = 0.$$

$\overline{N} = A\overline{i} + B\overline{j} + C\overline{k}$ нормал векторына перпендикуляр $A_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесінен өтетін жазықтықтың теңдеуі:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

МЫСАЛ. $x + y + 2z - 3 = 0$ жазықтығына перпендикуляр және $A(2; -1; 4), B(3; 2; -1)$ нүктелер арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін жазыңыз.

Шешуі. Ізделінді жазықтықтың нормалді $\overline{N}$ векторы ретінде берілген жазықтықтың $\overline{n} = (1; 1; 2)$ нормалді векторына және $\overline{AB} = (1; 3; -5)$ векторына перпендикуляр векторды алуға болады. Сондықтан

$$\overline{N} = \overline{AB} \times \overline{n} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 11\overline{i} - 7\overline{j} - 2\overline{k}.$$

Енді $\overline{N} = 11\overline{i} - 7\overline{j} - 2\overline{k}$ векторына перпендикуляр $A(2; -1; 4)$ нүктесінен өтетін жазықтықтың теңдеуін аламыз:

$$11(x - 2) - 7(y + 1) - 2(z - 4) = 0 \Rightarrow 11x - 7y - 2z - 21 = 0.$$

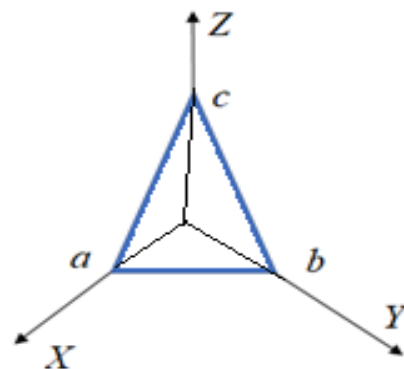
Жазықтықтың кесінділік теңдеуі

Егер жазықтық теңдеуінде $D \neq 0$ болса, онда теңдеудің барлық мүшелерін D бөліп, жазықтықтың кесінділік теңдеуін аламыз:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

мұндағы a, b, c жазықтықтың сәйкес координата осьтерін қиятын кесінділердің ұзындықтары.

Бұл жазықтық x осін $(a, 0, 0)$ нүктесінде, y осін $(0, b, 0)$ нүктесінде, z осін $(0, 0, c)$ нүктесінде қиып өтеді (1 сурет).



1 сурет.

МЫСАЛ. $P_1: 13x - 5y - 26z + 81 = 0$ жазықтықтың кесінділік теңдеуін жазыңыз.

Шешуі. P_1 жазықтықтың жалпы теңдеуін түрлендіреміз:

$$\begin{aligned} 13x - 5y - 26z + 81 = 0 &\Rightarrow 13x - 5y - 26z = -81 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{13x}{-81} - \frac{5y}{-81} - \frac{26z}{-81} = 1 \Rightarrow \frac{x}{-\frac{81}{13}} + \frac{y}{\frac{81}{5}} + \frac{z}{\frac{81}{26}} = 1, \end{aligned}$$

мұндағы

$$a = -\frac{81}{13}, \quad b = \frac{81}{5}, \quad c = \frac{81}{26}.$$

МЫСАЛ. $A_0(1, 2, -1)$, $A_1(3, 3, 2)$, $A_2(2, -3, 7)$ нүктелері берілген. P_1 жазықтықтың теңдеулерін табыңыз: а) үш нүктелер арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін; ә) жазықтықтың жалпы теңдеуін; б) жазықтықтың кесінділік теңдеуін; в) $A_0(1, 2, -1)$ нүктесінен өтетін жазықтықтың теңдеуін.

Шешуі. Есеп шарты бойынша $A_0(1, 2, -1)$, $A_1(3, 3, 2)$, $A_2(2, -3, 7)$ үш нүктелер берілген.

а) үш нүктелер арқылы өтетін P_1 жазықтықтың теңдеуін жазамыз:

$$P_1: \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 3-1 & 3-2 & 2+1 \\ 2-1 & -3-2 & 7+1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

ә) алынған үш нүктелер арқылы өтетін P_1 жазықтық теңдеуін жалпы түрінде жазамыз, ол үшін анықтауышты есептейміз де $Ax + By + Cz + D = 0$ түріне келтіреміз:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 8 \end{vmatrix} = \\ = (x-1) \cdot 1 \cdot 8 + (y-2) \cdot 3 \cdot 1 + (z+1) \cdot 2 \cdot (-5) - \\ - (z+1) \cdot 1 \cdot 1 - (y-2) \cdot 2 \cdot 8 - (x-1) \cdot 3 \cdot (-5) = \\ = 23x - 13y - 11z - 8 = 0.$$

Сонымен, жазықтықтың жалпы теңдеуін алдық

$$P_1: 23x - 13y - 11z - 8 = 0.$$

$A = 23, B = -13, C = -11$ коэффициенттерінің геометрикалық мағынасы: жазықтыққа перпендикулярлы (нормалды) векторының координаталары, яғни векторы $\vec{N} = (23, -13, -11) \perp P_1$.

б) жазықтықтың жалпы теңдеуіндегі $D = -8$ бос мүшесін теңдеудің оң жағына шығарып, теңдеудің екі жағын 8-ге бөліп, жазықтықтың кесінділік теңдеуін аламыз:

$$\frac{23x}{8} + \frac{-13y}{8} + \frac{-11z}{8} = \frac{8}{8}; \\ \frac{x}{8/23} + \frac{y}{-8/13} + \frac{z}{-8/11} = 1,$$

мұндағы $a = \frac{8}{23}, b = -\frac{8}{13}, c = -\frac{8}{11}$ жазықтықтың сәйкес координата осьтерін қиятын кесінділердің ұзындықтары.

в) $A_0(1, 2, -1)$ нүктесінен өтетін алынған P_1 жазықтықтың теңдеуін алу үшін анықтауышты бірінші жатық жолы бойынша жіктейміз:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 8 \end{vmatrix} = \\ = (x-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 8 \end{vmatrix} - (y-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} + (z+1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 0.$$

Осыдан жазықтықтың теңдеуін аламыз:

$$23(x-1) - 13(y-2) - 11(z+1) = 0.$$