

ВЕКТОРЛЫҚ АЛГЕБРА ЭЛЕМЕНТТЕРІ

Вектор ұғымы

Вектор координаталары

Вектор модулі (ұзындығы)

Кесіндінің ортасының координаталары

Векторлардың скалярлық көбейтіндісі

Векторлардың векторлық көбейтіндісі

Векторлардың аралас көбейтіндісі

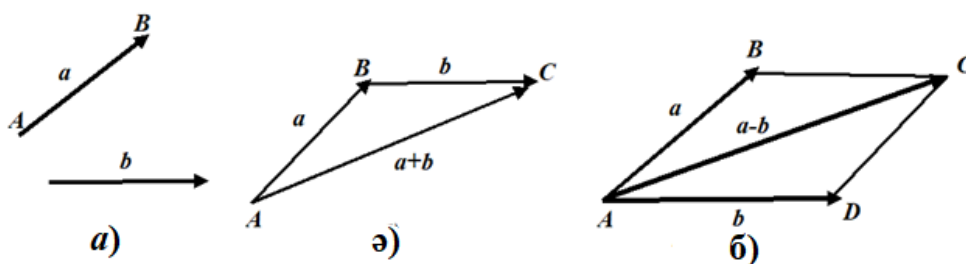
ТАПСЫРМА

ВЕКТОР ҰҒЫМЫ

Вектор деп бас нүктесі A соңғы нүктесі (ұшы) B болатын өзіне-өзін параллель жылжытуға болатын, бағытталған AB кесіндісін айтады (1а сурет).

$\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының $\vec{a} + \vec{b}$ қосындысы деп, $\vec{b}$ векторының басын $\vec{a}$ векторының ұшымен беттестірген жағдайда, $\vec{a}$ векторының басынан $\vec{b}$ векторының ұшына бағытталған $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ векторын айтады (1ә сурет).

$\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының айырымы $\vec{a} - \vec{b}$ деп $\vec{b}$ векторымен қосындысы $\vec{a}$ векторына тең болатындай $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$ векторын айтады, яғни $\vec{b} + \vec{x} = \vec{a}$ болса, онда $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$ (1б сурет).



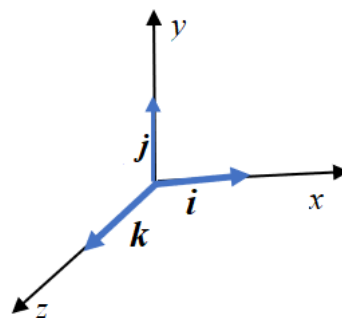
1 сурет.

ВЕКТОР КООРДИНАТАЛАРЫ

R^3 кеңістікте $OXYZ$ тікбұрышты декарттық координаталар жүйесі берілсін. Бұл жүйемен байланыста болатын, сәйкес OX, OY, OZ осьтерінің бойында орналасқан $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ бірлік векторлары (орттар)

$$[\vec{i}] = [\vec{j}] = [\vec{k}] = 1$$

кеңістік базисін құрайды (2 сурет).



2 сурет.

x, y, z – сандары $\vec{a}$ векторының $OXYZ$ кеңістігіндегі координаталары деп аталады да $\vec{a} = (x, y, z)$ жазылады.

Теорема. Векторларды қосқанда олардың сәйкес координаталары қосылады, ал векторды санға көбейткенде оның барлық координаталары сол санға көбейтіледі.

Тікбұрышты координаталар жүйесінде $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$ екі нүкте берілсе, онда $\overline{AB}$ векторының координаталары:
 $\overline{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. (3)
 Егер нүктелер өздерінің $O(0,0,0)$, $A(x, y, z)$ координаталарымен берілсе, онда
 $\overline{OA} = \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z)$.

МЫСАЛ. $A(2, -1; 0)$ және $B(3; 7; 5)$ нүктелер берілген, $\overline{AB}$ векторының координаталарын табыңыз.

Шешуі. $A(x_1, y_1, z_1) = (2, -1; 0)$ және $B(x_2, y_2, z_2) = (3; 7; 5)$ берілген. $\overline{AB}$ векторының координаталарын табу үшін (3) формуланы қолданамыз:

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (3 - 2; 7 - (-1); 5 - 0) = \\ &= (1; 8; 5).\end{aligned}$$

ВЕКТОР МОДУЛІ (ҰЗЫНДЫҒЫ)

$\overline{AB}$ векторының модулі (ұзындығы) деп AB кесіндісінің ұзындығын айтады, оны $|\overline{AB}|$ деп белгілейді де келесі формула арқылы есептейді:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (4)$$

Дербес жағдайда $\overline{a} = \overline{b}$ болса, онда $\overline{a} \cdot \overline{a} = |\overline{a}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$, бұдан $\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k} = (x, y, z)$ векторының ұзындығын анықтауға болады:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (5)$$

МЫСАЛ. $\overline{a} = (3; -2; 5)$ векторының ұзындығын табыңыз.

Шешуі. Есеп шарты бойынша $x = 3; y = -2; z = 5$. $\overline{a}$ векторының ұзындығын табу үшін (5) формуланы қолданамыз:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 4 + 25} = \sqrt{38}.$$

КЕСІНДІНІҢ ОРТАСЫНЫҢ КООРДИНАТАЛАРЫ

C нүктесі AB кесіндісінің ортасы болсын, онда C нүктесінің координаталары келесідей анықталады:

$$C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$

МЫСАЛ. $A(-2, 7, 0)$ және $B(-6, 3, -1)$ нүктелері берілсін. AB кесіндісінің ортасы C нүктесінің координаталарын анықтайық:

$$C\left(\frac{-2 - 6}{2}; \frac{7 + 3}{2}; \frac{0 - 1}{2}\right) = \left(-4; 5; -\frac{1}{2}\right).$$

ВЕКТОРЛАРДЫҢ СКАЛЯРЛЫҚ КӨБЕЙТІНДІСІ

Егер $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ базисінде

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$$

векторлары берілсе, онда

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \quad (6).$$

скалярлық көбейтінді деп

аталады.

$\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының
скалярлық көбейтіндісінің

белгілеулері:

$$(\vec{a}, \vec{b}) \text{ немесе } \vec{a} \cdot \vec{b}.$$

МЫСАЛ. $\vec{a}(3; -2; 5)$ және $\vec{b}(4; -1; 7)$

векторларының скалярлық көбейтіндісін
табыңыз.

Шешуі. Есеп шарты бойынша $x_1 = 3$,

$y_1 = -2$, $z_1 = 5$ және $x_2 = 4$, $y_2 = -1$,

$z_2 = 7$. Берілген $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының

скалярлық көбейтіндісін табу үшін (6)
формуланы қолданамыз:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 3 \cdot 4 + (-2) \cdot (-1) + 5 \cdot 7 = \\ &= 12 + 2 + 35 = 49. \end{aligned}$$

МЫСАЛ. $\vec{a}(-4, -4, -1)$, $\vec{b}(-3, 4, 1)$, $\vec{c}(9, -1, 0)$ векторлар берілген.

Скалярлық көбейтіндісін табыңыз.

Шешуі. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының скалярлық көбейтіндісі:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = \\ &= (-4) \cdot (-3) + (-4) \cdot 4 + (-1) \cdot 1 = 12 - 16 - 1 = -5. \end{aligned}$$

ВЕКТОРЛАРДЫҢ ВЕКТОРЛЫҚ КӨБЕЙТІНДІСІ

Егер $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ базисінде

$$\bar{a} = (x_1, y_1, z_1),$$

$$\bar{b} = (x_2, y_2, z_2) \text{ векторлары}$$

берілсе, онда **векторлық**

көбейтінді

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \quad (7).$$

МЫСАЛ. $\bar{a} = (3; -2; 5)$ және $\bar{b} = (4; -1; 7)$

векторларының векторлық көбейтіндісін табыңыз.

Шешуі. (7) формула бойынша алынған 3-ші ретті анықтауышты 1-ші жол бойынша жіктеп, есептейміз:

$$\begin{aligned} \bar{a} \times \bar{b} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -2 & 5 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = \\ &= \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= \bar{i}(-14 + 5) - \bar{j}(21 - 20) + \bar{k}(-3 + 8) = \\ &= -9\bar{i} - \bar{j} + 5\bar{k}. \end{aligned}$$

Сонымен $\bar{a} \times \bar{b} = -9\bar{i} - \bar{j} + 5\bar{k}$ немесе

$$\bar{a} \times \bar{b} = (-9; -1; 5).$$

МЫСАЛ. Берілген $\vec{b}(-3, 4, 1)$, $\vec{c} = (9, -1, 0)$ векторларының векторлық көбейтіндісін табыңыз.

Шешуі. $\vec{b}$ және $\vec{c}$ векторларының векторлық көбейтіндісі:

$$\begin{aligned} \vec{b} \times \vec{c} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & 1 \\ 9 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 9 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = \\ &= \vec{i} + 9\vec{j} - 33\vec{k} = (1, 9, -33). \end{aligned}$$

$\vec{b}$ және $\vec{c}$ векторларынан құрылған **параллелограмның ауданы** осы векторлардың векторлық көбейтіндісінен шыққан вектордың ұзындығына тең:

$$S_{\text{парал/м}} = |\vec{b} \times \vec{c}|,$$

мұндағы $\vec{b} \times \vec{c}$ – векторлық көбейтінді.

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = (x, y, z),$$

онда $\vec{b}$ және $\vec{c}$ векторларынан құрылған **параллелограмның ауданы**

$$S_{\text{парал/м}} = |\vec{b} \times \vec{c}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

квадрат бірлікке тең.

ВЕКТОРЛАРДЫҢ АРАЛАС КӨБЕЙТІНДІСІ

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторларының **аралас көбейтіндісі** деп $\vec{a}, \vec{b}$ векторларының $\vec{a} \times \vec{b}$ векторлық көбейтіндісі мен $\vec{c}$ векторының скаляр көбейтіндісін айтады: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Егер $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ базисінде

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \vec{b} = (b_x, b_y, b_z),$$

$$\vec{c} = (c_x, c_y, c_z) \text{ үш вектор}$$

координаталарымен берілсе, онда

аралас көбейтінді тең болады:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ және $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$ векторларына салынған **параллелепипед көлемі** осы үш вектордың аралас көбейтіндісінің модуліне тең:

$$V_{\text{пар/пед}} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}| = \pm \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ және $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$ векторларынан құрылған **пирамиданың көлемі**

$$V_{\text{пир/ң}} = \frac{1}{6} V_{\text{парал/тің}} = \pm \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (8)$$

МЫСАЛ. $\vec{a} = (-4, -4, -1), \vec{b} = (-3, 4, 1), \vec{c} = (9, -1, 0)$ векторларынан құрылған пирамиданың көлемін табыңыз.

Шешуі. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторларынан құрылған аралас көбейтіндіні (8) формуланы қолданып, пирамиданың көлемін есептейміз:

$$V = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} -4 & -4 & -1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 9 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot (0 - 36 - 3 + 36 - 4 - 0) = \frac{1}{6} \cdot |-7| = 1\frac{1}{6} \text{ м}^3.$$

МЫСАЛ. $\vec{a}(-4, -4, -1), \vec{b}(-3, 4, 1), \vec{c}(9, -1, 0)$ векторларының аралас көбейтіндісін табыңыз.

Шешуі. $\vec{a}, \vec{b}$ және $\vec{c}$ векторларының аралас көбейтіндісі:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} -4 & -4 & -1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 9 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -7.$$

ТАПСЫРМА. A, B нүктелері және $\vec{b}, \vec{c}$ векторлары берілген. Табыңыз

а) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ векторының ұзындығын, AB кесіндісінің ортасының координаталарын; ә) скалярлық, векторлық және аралас көбейтінділерін;

б) $\vec{b}$ және $\vec{c}$ векторларынан құрылған параллелограмның ауданын, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторларынан құрылған пирамиданың көлемін.

- | | |
|---|--|
| 1. $A(5, -4, 3), B(1, 2, -8),$
$\vec{b} = (0, 1, 4), \vec{c} = (5, 2, -3)$ | 7. $A(-3, 1, 0), B(7, 1, -5),$
$\vec{b} = (7, 1, 4), \vec{c} = (5, 8, -3)$ |
| 2. $A(0, 4, 5), B(3, -2, 1),$
$\vec{b} = (6, 4, 4), \vec{c} = (0, 2, -2)$ | 8. $A(3, -2, 5), B(4, 5, 7),$
$\vec{b} = (5, 1, 4), \vec{c} = (5, -3, -3)$ |
| 3. $A(2, -3, 7), B(3, 2, 8),$
$\vec{b} = (6, 4, 6), \vec{c} = (0, 6, 2)$ | 9. $A(2, -1, 7), B(6, 3, 4),$
$\vec{b} = (4, 5, 4), \vec{c} = (7, 8, 5)$ |
| 4. $A(3, 1, 7), B(2, -3, 9),$
$\vec{b} = (9, 1, 4), \vec{c} = (8, 2, -3)$ | 10. $A(2, 1, -6), B(1, 4, 9),$
$\vec{b} = (1, 1, 8), \vec{c} = (5, -3, 9)$ |
| 5. $A(2, -4, 8), B(5, 4, 7),$
$\vec{b} = (6, 3, 4), \vec{c} = (7, 2, -2)$ | 11. $A(3, 2, 5), B(4, 0, -3),$
$\vec{b} = (7, 2, 4), \vec{c} = (5, 8, 4)$ |
| 6. $A(2, 3, -1), B(-6, 4, 2),$
$\vec{b} = (2, 9, 6), \vec{c} = (0, 6, 4)$ | 12. $A(-4, 2, 3), B(8, 7, -2),$
$\vec{b} = (5, 3, 4), \vec{c} = (1, 3, -3)$ |