

МАТРИЦАЛАРҒА АМАЛДАР ҚОЛДАНУ

Матрицаны санға көбейту

$A = (a_{ij})$ матрицасы мен k тұрақты санының көбейтіндісі деп әрбір элементі ka_{ij} тең $A = (ka_{ij})$ матрицасын айтады

$$k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} \end{pmatrix},$$

мұндағы $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$.

Берілген сан мен матрицаның көбейтіндісін табыңыз.

МЫСАЛ.

$$8 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \cdot 3 & 8 \cdot 1 \\ 8 \cdot 5 & 8 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 8 \\ 40 & -8 \end{pmatrix}.$$

МЫСАЛ.

$$3A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 9 & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 15 & 3 \cdot (-4) & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 27 & 0 \\ 45 & -12 & 3 \end{pmatrix}.$$

Матрицалардың қосындысы мен айырымы. Бірдей өлшемді A мен B матрицаларының **қосындысы (айырымы)** деп әрбір элементі $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$ тең, өлшемі A мен B өлшеміндей $C = A \pm B$ матрицасын айтады

$$A_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; B_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{pmatrix}.$$



Тек өлшемдері бірдей матрицаларды қосуға және азайтуға болады.

МЫСАЛ. Берілген матрицалардың қосындысын есептеу:

$$A_{2 \times 2} + B_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+4 & 3+0 \\ 1+5 & 7+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 6 & 15 \end{pmatrix}.$$

МЫСАЛ. Берілген матрицалардың айырымын есептеу:

$$\begin{aligned} A_{2 \times 3} - B_{2 \times 3} &= \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 8 & 9 & -3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 7 - (-2) & 1 - 0 & 3 - 5 \\ -4 - 8 & 2 - 9 & 6 - (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & -2 \\ -12 & -7 & 9 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

МЫСАЛ. Берілген матрицалардың қосындысын есептеу:

$$\begin{aligned} 2A_{3 \times 3} + 3B_{3 \times 3} &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 7 & 2 & 4 \\ -5 & 7 & 8 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & -9 & 11 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -10 \\ 14 & 4 & 8 \\ -10 & 14 & 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 21 & 3 \\ 0 & -9 & 3 \\ 6 & -27 & 33 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2+12 & 0+21 & -10+3 \\ 14+0 & 4-9 & 8+3 \\ -10+6 & 14-27 & 16+33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -7 \\ 14 & -5 & 11 \\ -4 & -13 & 49 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1-ТАПСЫРМА. Берілген матрицалардың қосындысын және айырымын есептеңіз.

1.1. $A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}.$

1.2. $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & 11 \end{pmatrix}; B = 3 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 8 & 9 & -3 \end{pmatrix}.$

1.3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 10 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}; B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & -9 & 11 \end{pmatrix}.$

1.4. $A = (-1) \cdot \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}.$

1.5. $A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ 1 & 9 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$

1.6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 7 & 2 & 4 \\ -5 & 7 & 8 \end{pmatrix}; B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & -9 & 11 \end{pmatrix}.$

1.7. $A = (-3) \cdot \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -5 & 13 \\ 11 & 3 \end{pmatrix}.$

1.8. $A = 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & -7 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 11 & -9 \\ 1 & 2 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}.$

1.9. $A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -9 & 3 \end{pmatrix}.$

1.10. $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -3 \\ 1 & 7 & 4 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}; B = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 2 & 10 & 1 \end{pmatrix}.$

Матрицалардың көбейтіндісі. $A_{m \times n}(a_{ij})$ және $B_{n \times p}(b_{ij})$ матрицаларының көбейтіндісі деп i -ші жол мен j -ші баған қиылысуындағы c_{ij} элементі A матрицасының i -ші жолы мен B матрицасының j -ші бағанының сәйкес элементтерінің көбейтінділерінің қосындысына тең болатын

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, p.$$

өлшемі $m \times p$ тең матрицасын, яғни $C_{m \times p} = A_{m \times n} \cdot B_{n \times p}$ матрицасын айтады.

! 1-ші матрицаның бағандар саны 2-ші матрицаның жолдар санына
• тең болатын матрицаларды ғана көбейтуге болады: $A_{m \times n} \cdot B_{n \times p}$.

! $AB \neq BA$, яғни матрицаларды көбейту коммутативті емес.

МЫСАЛ. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ және $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$ матрицалардың көбейтіндісін табыңыз.

Шешуі. $A_{2 \times 2}$ матрицаның бағандар саны 2-ге тең және $B_{2 \times 2}$ матрицаның жолдар саны 2-ге тең, сондықтан бұл матрицаларды көбейтуге болады.

$$\begin{aligned} C_{2 \times 2} &= A_{2 \times 2} \cdot B_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -7 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-7) \\ 4 \cdot (-1) + (-5) \cdot 1 & 4 \cdot 3 + (-5) \cdot (-7) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -2 + 1 & 6 - 7 \\ -4 - 5 & 12 + 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -9 & 47 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

МЫСАЛ. $A = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ 1 & 9 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ және $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$ матрицалардың көбейтіндісін табыңыз.

Шешуі. $A_{3 \times 2}$ матрицаның бағандар саны 2-ге тең және $B_{2 \times 2}$ матрицаның жолдар саны 2-ге тең, сондықтан бұл матрицаларды көбейтуге болады.

$$\begin{aligned} C_{3 \times 2} &= A_{3 \times 2} \cdot B_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ 1 & 9 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -7 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 10 \cdot (-1) + (-3) \cdot 1 & 10 \cdot 3 + (-3) \cdot (-7) \\ 1 \cdot (-1) + 9 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 9 \cdot (-7) \\ (-3) \cdot (-1) + 2 \cdot 1 & (-3) \cdot 3 + 2 \cdot (-7) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -10 - 3 & 30 + 21 \\ -1 + 9 & 3 - 63 \\ 3 + 2 & -9 - 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 51 \\ 8 & -60 \\ 5 & -23 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

МЫСАЛ. $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 0 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$ және $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 9 \\ -11 & -5 \end{pmatrix}$ матрицалардын

көбейтіндісін табыңыз.

Шешуі. $A_{2 \times 2}$ матрицаның бағандар саны 2-ге тең, ал $B_{3 \times 2}$ матрицаның жолдар саны 3-ке тең, сондықтан бұл матрицаларды көбейтуге болмайды:

$$A_{2 \times 2} \cdot B_{3 \times 2} = \emptyset.$$

2-ТАПСЫРМА. Берілген матрицалардың көбейтіндісін табыңыз.

2.1. $A = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$

2.2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -6 & 0 & 11 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 4 & -5 \\ 2 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$

2.3. $A = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}.$

2.4. $A = -1 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}.$

2.5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 7 & 2 & 4 \\ 9 & 3 & 8 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & -9 & 8 \end{pmatrix}.$

2.6. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 8 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 9 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$

2.7. $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 9 & -1 & 2 \\ 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & 5 \\ 2 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$

2.8. $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & -7 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$

2.9. $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & 5 \\ 9 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$

2.10. $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -3 \\ 1 & 7 & 4 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$